Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Ricardo Kennedy, Daniel Wieczorek

Quantenphysik

Blatt 7

SS 2013

Abgabe: Bis Mittwoch, den 05.06.2013, 10 Uhr im Briefkasten vor dem Theorie-Institut
Besprechung: Freitag, den 07.06.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor

23. Geometrische Phase II

(2+2+3+2+2=11 Punkte)

Die Bewegung eines Teilchens der Masse m sei auf eine Kreisbahn mit Radius R beschränkt. Die klassische Beschreibung erfolgt durch eine Winkelkoordinate θ und den konjugierten (Dreh)Impuls $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$, sowie die Hamiltonfunktion $H = \frac{1}{2mR^2}p_\theta^2$.

a) Benutzen Sie $\hat{p}_\theta = -i\hbar\partial_\theta$ um die zeitabhängige Schrödingergleichung $\hat{H}\psi = i\hbar\partial_t\psi$ für eine Wellenfunktion $\psi(\theta, t)$ zu schreiben. Finden Sie die normierten Eigenfunktionen $\phi_n(\theta)$ von $\hat{H}$ sowie die entsprechenden Energien (Eigenwerte) E_n.

b) Zeigen Sie, dass $\psi(\theta, t) = \sum_n a_n e^{-iE_n t/\hbar}\phi_n(\theta)$ falls $\psi(\theta, 0) = \sum_n a_n\phi_n(\theta)$ und damit, dass die Zeitentwicklung für den Ortseigenzustand $\psi(\theta, 0) := \delta(\theta - \theta_0)$ gegeben ist durch

$$\psi(\theta, t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\hbar n^2}{2mR^2}t + in(\theta-\theta_0)}. \tag{1}$$

Hinweis: Nutzen Sie die Fouriertransformation $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ mit $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta f(\theta)e^{-in\theta}$ um eine geeignete Darstellung von $\delta(\theta - \theta_0)$ als Summe zu finden.

Im Folgenden soll die Zeitentwicklung von $\psi(\theta, 0) = \delta(\theta - \theta_0)$ mit Hilfe der semiklassischen Näherung des Pfadintegrals gefunden werden.

c) Zeigen Sie, dass $\psi(\theta, t) = K(\theta, \theta_0, t)$ für den Propagator K des Systems. Benutzen Sie nun die Van Fleck Formel für K um zu zeigen, dass

$$\psi(\theta, t) = \sqrt{\frac{mR^2}{2\pi i\hbar t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{imR^2}{2\hbar}\frac{(\theta-\theta_0+2\pi n)^2}{t}}. \tag{2}$$

d) Zeigen Sie, dass (2) und (1) bis auf einen Phasenfaktor übereinstimmen (also dass die Van Fleck Formel in diesem Fall exakt ist). Hinweis: Fassen Sie den Ausdruck in (2) als 2π-periodische Funktion $f(\theta)$ auf und bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten.

Betrachten Sie nun die Verallgemeinerung in der das Teilchen eine Ladung e hat und das Innere der Kreisbahn von einem magnetischen Fluss Φ durchsetzt ist. Der entsprechende klassische Hamiltonoperator lautet somit $H = \frac{1}{2mR^2}\left(p_\theta - \frac{e\Phi}{2\pi}\right)^2$.

e) Wiederholen Sie die Aufgabenteile **a)**, **b)** und **c)** für diesen Fall. Was ändert sich?

24. Homogenes elektrisches Feld *(1+2+3=6 Punkte)*

Ein Elektron der Masse m, Ladung e und Energie E sei einem homogenen elektrischen Feld $\mathcal{E}$ in einer Dimension ausgesetzt. Ziel dieser Aufgabe ist die Herleitung der bekannten Formel

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - e\mathcal{E}x, \tag{3}$$

die in der Quantenmechanik allerdings nur asymptotisch gilt mit $v := j/\rho$ dem Quotienten aus Wahrscheinlichkeitsstromdichte j und Wahrscheinlichkeitsdichte ρ.

a) Wiederholen Sie die Definitionen von ρ und j aus der Vorlesung und zeigen Sie, dass die (eindimensionale) Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

b) Formulieren Sie die stationäre Schrödingergleichung für die Wellenfunktion u des Elektrons. Schreiben Sie diese mit Hilfe der dimensionslosen Variablen $\xi := \frac{x}{l} + \lambda$ um, wobei die charakteristische Länge l und der Parameter λ durch folgende Relationen definiert sind:

$$\frac{2me\mathcal{E}}{\hbar^2} = \frac{1}{l^3} \quad \text{und} \quad \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{\lambda}{l^2}.$$

Die Lösung der gefundenen Differentialgleichung lässt sich durch sogenannte Hankelfunktionen $\mathfrak{h}^{(1)}_{1/3}$ ausdrücken ($C =$ konst.):

$$u(\xi) = C\sqrt{\frac{\pi}{3}\xi}\; \mathfrak{h}^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}\right), \tag{4}$$

die für $z \in \mathbb{C}$ folgendes asymptotisches Verhalten zeigen:

$$\mathfrak{h}^{(1)}_{1/3}(z) \xrightarrow{|z|\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i\left(z - \frac{5\pi}{12}\right)\right]. \tag{5}$$

c) Betrachten Sie nun den Fall $x \gg l$. Berechnen Sie mit Hilfe der asymptotischen Formel (5) die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ sowie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte j und zeigen Sie, dass Gleichung (3) gilt.