Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Ricardo Kennedy, Daniel Wieczorek

Quantenphysik

Blatt 8

SS 2013

Abgabe: Bis **Mittwoch**, den 12.06.2013, **12 Uhr** im Briefkasten vor dem Theorie-Institut
Besprechung: Freitag, den 14.06.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor

Fragestunde: Gibt es ab sofort montags um 14:15 in unserem Büro (1.02 im Container)!

25. Tunneleffekt *(5 Punkte)*

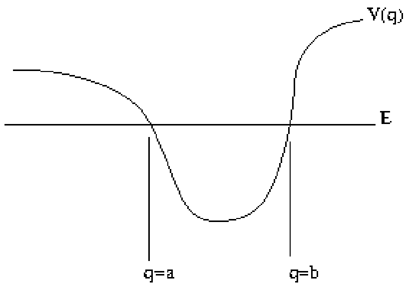
Berechnen Sie mit Hilfe der WKB-Methode den Transmissionkoeffizienten eines Teilchens der Masse m und der Energie E für einen langsam veränderlichen Potentialwall $V(x)$, wobei $V(x)$ an den Enden des Intervalls $(-\infty, \infty)$ gegen Grenzen strebt, die tiefer als die Energie E des betrachteten Teilchens liegen. Nehmen Sie an, dass es nur zwei Umkehrpunkte a und b gibt und zeigen Sie für die Tunnelamplitude

$$t = \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2m(V(x)-E)}dx\right).$$

Das Betragsquadrat dieser Größe ergibt den Transmissionkoeffizienten.

26. Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsregel *(2+2+2=6 Punkte)*

Wir betrachten stationäre, gebundene Zustände eines Teilchens der Masse m in einer Dimension in einem Potential $V(q)$ in WKB-Näherung. Der Hamiltonoperator ist $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)$. Der Potentialverlauf habe die skizzierte Form mit einem klassisch zugänglichen Bereich $a \leq q \leq b$. Aus der Vorlesung sind die Anschlussbedingungen an den Umkehrpunkten a, b bekannt.



Bei $q = a$ schließen

$$\frac{1}{\sqrt{|p|}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_q^a |p|dq\right) \quad (q < a)$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^q pdq - \frac{\pi}{4}\right) \quad (q > a),$$

bei $q = b$

$$\frac{1}{\sqrt{|p|}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_b^q |p|dq\right) \quad (q > b)$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_q^b pdq - \frac{\pi}{4}\right) \quad (q < b)$$

aneinander an; dabei ist $p = p(q) = \sqrt{2m(E - V(q))}$.

a) Leiten Sie die Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsregel für die Energieniveaus $E_0, E_1, E_2, \ldots$ her:

$$\int_a^b \sqrt{2m(E - V(q))}dq = \hbar\pi(n + \frac{1}{2}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

b) Welches Energiespektrum liefert die Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsregel für den harmonischen Oszillator?

c) Zeigen Sie, dass die Energieniveaus E_n zum homogenen Potential $V(q) = Aq^{2k}$ $(A > 0, k \in \mathbb{N})$ für große n die Asymptotik $E_n \propto n^{2k/(k+1)}$ aufweisen.

27. Hüpfender Quantenball *(1+1+2+2=6 Punkte)*

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im Potential $V(x) = \begin{cases} mgx & \text{falls } x \geq 0 \\ \infty & \text{falls } x < 0. \end{cases}$

a) Finden Sie geeignete Längen- und Energieskalen l_0 und E_0, um mit der Transformation $x = yl_0,\ E = \epsilon E_0$ die Schrödingergleichung auf die Form

$$-\frac{d^2\psi}{dy^2} + y\psi = \epsilon\psi$$

zu bringen.

Die anschließende Transformation $z = y - \epsilon$ führt auf die sog. Airy-Differentialgleichung

$$-\frac{d^2\psi}{dz^2} + z\psi = 0.$$

b) Verwenden Sie ein Computer-Algebra-System (CAS), um sich ein Bild von den beiden linear unabhängigen Lösungen dieser DGL zu machen. Nur eine kommt für eine Lösung der Schrödingergleichung in Frage – welche und warum?

c) Berechnen Sie mit dem CAS nun die ersten 10 dimensionslosen Energieeigenwerte ϵ.

d) Berechnen Sie diese Energieeigenwerte nun in WKB-Näherung und vergleichen Sie. Hinweis: Verwenden Sie hierzu das Potential $V(x) = mg|x|$ und betrachten Sie am Ende nur die ungeraden Lösungen.

28. Kontinuitätsgleichung *(3 Punkte)*

Folgern Sie aus der Schrödingergleichung für die Wellenfunktion ψ, dass die quantemechanischen Ausdrücke für die Ladungs- und Stromdichte

$$\rho(\mathbf{x}, t) = e|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \text{ und } \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \frac{e\hbar}{m}\text{Im}\left(\overline{\psi(\mathbf{x}, t)}(\text{grad} - \frac{ie}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))\psi(\mathbf{x}, t)\right)$$

der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,\mathbf{j} = 0$$

genügen.