Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Ricardo Kennedy, Daniel Wieczorek

Quantenphysik

Blatt 9

SS 2013

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19.06.2013, 12 Uhr im Briefkasten vor dem Theorie-Institut
Besprechung: Freitag, den 21.06.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor

28. Klassische Ladung *(2+3+2+1=8 Punkte)*

Die klassische Bewegung eines Teilchens der Ladung e und Masse m im elektromagnetischen Feld wird bestimmt durch

$$m\dot{\mathbf{v}} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

a) Zeigen Sie, dass obige Gleichung aus der Euler-Lagrange-Gleichung der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + e\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - e\Phi$$

folgt, wobei die Feldstärken durch die Potentiale mittels $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ bestimmt sind.

b) Bestimmen Sie die Bahn $\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3$ eines Teilchens der Ladung e und Masse m für den Fall eines Magnetfelds $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$ zusammen mit einem dazu orthogonalen elektrischen Feld $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_1$. Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Ursprung und habe eine Anfangsgeschwindigkeit von $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{e}_2$.

c) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit periodisch ist: $\mathbf{v}\big(t + 2\pi N \frac{m}{eB}\big) = \mathbf{v}(t)$ für $N \in \mathbb{N}$. Was ist die Durchschnittsgeschwindigkeit nach N Perioden?

d) Skizzieren Sie $\mathbf{x}(t)$ für $v_0 = 0$, $v_0 > 0$ sowie $v_0 = -\frac{E}{B}$.

29. 2-d Elektron im elektromagnetischen Feld *(1+1+3+3=8 Punkte)*

Ein Elektron bewege sich in der Ebene unter dem Einfluss der homogenen elektrischen und magnetischen Feldstärken aus Aufgabe 28 b).

a) Stellen Sie die Schrödingergleichung in der Landau-Eichung auf.

b) Suchen Sie nach stationären Zuständen mit dem Ansatz $f(x, y) = e^{iky}\varphi(x)$. Welche Eigenwertgleichung ergibt sich für $\varphi(x)$?

c) Führen Sie die Gleichung für φ auf das Eigenwertproblem für den eindimensionalen harmonischen Oszillator zurück. Geben Sie das Spektrum und die Eigenfunktionen an.

d) Normieren Sie die stationären Zustände im untersten Landau-Niveau ($n = 0$) anhand der Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x,y)|^2 dx = L^{-1},$$

sodass 1 Elementarladung pro Streifen der Breite L in y-Richtung vorliegt. Berechnen Sie nun die elektrische Stromdichte für diese Zustände. Wie groß ist der elektrische Strom durch die x-Achse?

30. Symplektische Form

(2+2+1=5 Punkte)

In der Vorlesung wurde erwähnt, dass die Poissonklammer aus der symplektischen 2-Form ω folgt. In dieser Aufgabe soll der Zusammenhang zwischen der koordinatenfreien Sprache der Differentialformen und der gewohnten koordinatenabhängigen Sprache anhand des Phasenraums $\mathbb{R}^{2n}$ hergestellt werden. In diesem Fall kann ω global geschrieben werden als

$$\omega = \sum_i dx_i \wedge dp_i.$$

a) Zu jeder glatten Phasenraumfunktion $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ gibt es ein Vektorfeld X_f, das durch

$$\omega(X_f, \cdot) = df(\cdot)$$

definiert ist. Bestimmen Sie Koeffizientenfunktionen a_i bzw. b_i, $i = 1, \ldots, n$, sodass $X_f = \sum_i \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$. Hinweis: $\frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial}{\partial p_i}$ können als Tangentialvektoren gesehen werden mit $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij} = dp_i(\frac{\partial}{\partial p_j})$ und $dx_i(\frac{\partial}{\partial p_j}) = 0 = dp_i(\frac{\partial}{\partial x_j})$.

b) Zeigen Sie, dass

$$\omega(X_f, X_g) = \{f, g\},$$

wobei die Poissonklammer wie üblich als $\{f,g\} := \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$ definiert ist.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\dot{\gamma}(t) = X_H(\gamma(t))$$

für eine Phasenraumkurve $\gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ aus den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen folgt, wobei H die Hamiltonfunktion ist.