Mathematik für Studierende der Physik I

Martin Janßen

8.April - 18.Juli 2025

Oranisatorisches

Vorlesung:

Ort: Hörsaal III, Di. u. Fr. 10:00 - 11:30

Webseite: ILIAS mit Script und Video-Aufzeichnungen

https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6202370.html

QR-Codes folgen gleich

Übungen:

Obertutor: Carl Zelle

Tutoren: Julian Arenz, Lasse Gresista, Leonard Kaufhold,

Alexander Wowchik

Start: 10.04.2025 mit Präsenzübungsmaterial

4 Gruppen Do. 10:00-11:30 / 14:00- 15:30 / 16:00 -17:30 Seminarräume II. Physik und Seminarraum Kernphysik Wechseln ist möglich bei Beachtung der Gruppengröße!

Oranisatorisches

Übungen:

Ziel der Übungen: Eigenständiges Arbeiten und Interagieren, Diskutieren, Präsentieren Organisation und Kommunikation über Plattform SLACK

https://join.slack.com/t/mathphys2025/shared_invite/ zt-31rl5bj1x-cQAQ1A6CsNgY6fdL92eEDA

Übungsaufgaben:

Ausgabe: Montags als pdf auf SLACK Abgabe bis zum folgenden Montag auf SLACK beim Tutor Kopie der Aufgaben auch auf ILIAS

https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250435.html

- ► Klausurzulassung: mindestens 50 % der Übungspunkte
- Navartermin: $23.07.2025\ 08:00\ -\ 11:00$, HS I + HS II + Kurt-Alder (bei Bedarf)
- Nachklausurtermin: 17.09.2025 14:00 17:00, HS I

ILIAS Vorlesung QR-Code



ILIAS Übungen QR-Code



Inhaltsverzeichnis

- I. Grundlagen
- II. Vektorräume
- III. Euklidische Vektorräume
- IV. Determinanten
- V. Lineare Abbildungen und lineare Gleichungssysteme
- VI. Analysis in einer Variablen
- VII. Kurven in Euklidischen Räumen, angepasste Koordinatensysteme
- VIII. Differentialrechnung für Vektorfelder
- IX. Integration im Mehrdimensionalen
- X. Integralsätze für Vektorfelder
- XI. Differentialgleichungen

Grundlagen

- I.1 Symbole, Aussagenlogik, Mengen, und Abbildungen
- I.2 Gruppen
- I.3 Zahlenmengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R}
- I.4 Komplexe Zahlenmenge $\mathbb C$

I.1 Symbole

- Gesetzmäßigkeiten durch
 Begriffe und ihre Beziehungen
- Mathematisierung angelegt in physikalischen Größen als Elemente strukturierter Mengen

 $G = Zahlenwert \cdot Maßeinheit$

Skalar: Masse $m = 1, 5 \,\mathrm{kg}$

Vektor: Geschwindigkeit
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 300 \\ -200 \\ 10 \end{pmatrix} \text{km/h}$$

nur sinnvoll zu einer Basis von drei Vektoren Funktionen von Größen: kinetische Energie $E_{\rm kin}=\frac{m}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}$, in z.B. ${\rm kg}({\rm m/s})^2={\rm J}$

Gemeinsame Maßeinheiten bei Rechnungen

$$E_1 + E_2 = 12 \,\text{kWh} + 6000 \,\text{kJ} = 12 \,\text{kJ/s} \cdot 3600 \,\text{s} + 6000 \,\text{kJ}$$

= $4,92 \cdot 10^4 \,\text{kJ}$

I.1 Symbole

- ▶ **Symbole/Zeichen** wie +; \cdot ; \vec{v} ; $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$; π für kompakte Darstellung von Strukturen
- Nun häufig vorkommend:

Summenzeichen und Indizes:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i$$

steht für $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.

Sehr kompakt z.B. für den Mittelwert \overline{X} aus N Zahlen $X_1 \dots X_N$:

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

► Einsteinsche Summenkonvention (fehleranfällig!): Bei doppelt vorkommenden Indizes Summenzeichen weglassen

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i = v_i w_i$$

I.1 Aussagenlogik

Für **Beweise** Symbole der zweiwertigen (wahr=w; falsch=f) **Aussagenlogik**

 $\begin{array}{l} \mathsf{IMPLIKATION} \Rightarrow ; \ \mathsf{\ddot{A}QUIVALENZ} \Leftrightarrow ; \ \mathsf{UND} \ \land ; \ \mathsf{ODER} \ \lor \\ \mathsf{NEGATION} \ \mathsf{zu} \ \mathsf{Aussage} \ A \colon \overline{A} \ \mathsf{oder} \ \lnot A \\ \mathsf{Regeln} \ \mathsf{durch} \ \mathbf{Wahrheitstabellen} \end{array}$

A	B	\overline{A}	$A \wedge B$	$A \lor B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	w	f	w	w	W	W
W	f	f	f	W	f	f
f	w	W	f	W	W	f
f	f	W	f	f	W	W

Beachten Sie: Bei $A\Rightarrow B$ ist B nur ein Indiz für A (notwendig für A, aber nicht hinreichend); A ist hinreichend für B, aber nicht notwendig. Nur bei der Äquivalenz sind A und B logisch gleichwertig. $A\vee B$ ist nicht ausschließend gemeint.

I.1 3 wesentliche Beweismethoden

1. **direkter Beweis** durch Implikationen aus wahren Anfangsaussagen, z.B.

$$a = -3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{a^2} = 3$$

- 2. **indirekter Beweis** durch Implikationen, die aus der Annahme, die Behauptung sei falsch, auf eine bekanntermaßen falsche Aussage führen, z.B. TAFEL001 $\sqrt{2}$ sei rational in gekürzter Primfaktordarstellung. Dann hat 2 alle Primfaktoren von $\sqrt{2}$ doppelt. Das ist falsch, da 2 keine doppelten Primfaktoren hat. Also, $\sqrt{2}$ nicht rational.
- Vollständige Induktion für abzählbar viele Fälle: Für den ersten Fall zeigt man die Gültigkeit, dann zeigt man die Implikation: Aus jedem Vorgänger Fall folgt der Nachfolger Fall, z.B.

$$\sum_{j=1}^{N} j = \frac{(N+1)N}{2}$$

TAPEL 001

Sei 72 rational, also lui Bruch zweier natürlicher Zahlen 12 = P P.9EN

Pund 9 haben euie Prinfaktorterlesung alle genein samen sceen bereits gekürzt

1 2 = Pn... Pr 9n... 9s

2 = (\overline{V2'})^2 = \frac{P_1 \cdot P_2 \cdot \cdot P_2 \cdot \cdot

ebenfalls keine ganeinsamen mehr & alle doppelt!

Aber 2 = $\frac{2}{7}$ gekürzt, keine doppelten Primf. Also Widespruch & . $\sqrt{2}$ kann nicht rational sein.

TAFEL002

Für N=1 ist es erfüllt, denn

$$\sum_{i=1}^{1} j = 1 = \frac{(1+1)1}{2}$$

Nun sei es für N wahr, folgere daraus, was für N+1 gilt:

$$\sum_{j=1}^{N+1} j = \sum_{j=1}^{N} j + (N+1) =$$

$$\frac{(N+1)N}{2} + (N+1) = N^2/2 + 3N/2 + 1 = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$$

Damit ist es auch für N+1 wahr, wenn es für N gilt.

I.1 Mengen und Abbildungen

- \blacktriangleright Mathematik als Strukturwissenschaft: Mengen M und Abbildungen A
- Mengen aus unterscheidbaren Elementen durch Auflistung oder Eigenschaftsaussagen
- Abbildungen A liefern Elemente $(x,y=A(x)) \in D \times Z$ mit: $A:D \to Z, \ x \mapsto y = A(x)$ Jedem Element x aus D (Definitionsmenge) wird genau ein Element y = A(x) aus Z (Zielmenge) zugeordnet. Die Menge aller Werte von A, A(D) = W ist die Wertemenge, eine Teilmenge von Z.

$$\forall x \in D; x \mapsto y = A(x) \in Z, \ A(D) \subseteq Z$$

Ist Z eine Zahlenmenge spricht man auch von **Funktionen** $f:D\to Z\,,x\mapsto f(x)$. Abbildungen/Funktionen dargestellt durch (x,y) **Tabellen**, x-y **Graphen** und/oder durch **Terme** wie $y=f(x)=x^2+\sin(x)$.

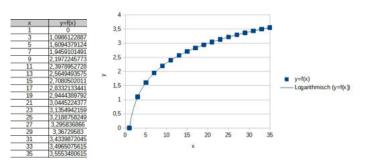
I.1 Mengen und Abbildungen - Beispiel

 $D := \{ n \in \mathbb{N} \mid n/2 \notin \mathbb{N} \} \text{ (ungerade natürliche Zahlen)}$

 $Z = \mathbb{R}$ (alle reelen Zahlen = beliebige Dezimalzahlen)

Funktionsterm $f(x) = \ln(x)$.

Tabelle und Graph Darstellung meist unvollständig. Funktionsterm allgemeiner.



Der Funktionsterm $\ln(x)$ gibt Anlass, auf das kontinuierliche Intervall $D':=[1;\infty[$ ohne Lücken zu einer stetigen Kurve zu erweitern. Geht auch $D'':=]0;\infty[$?

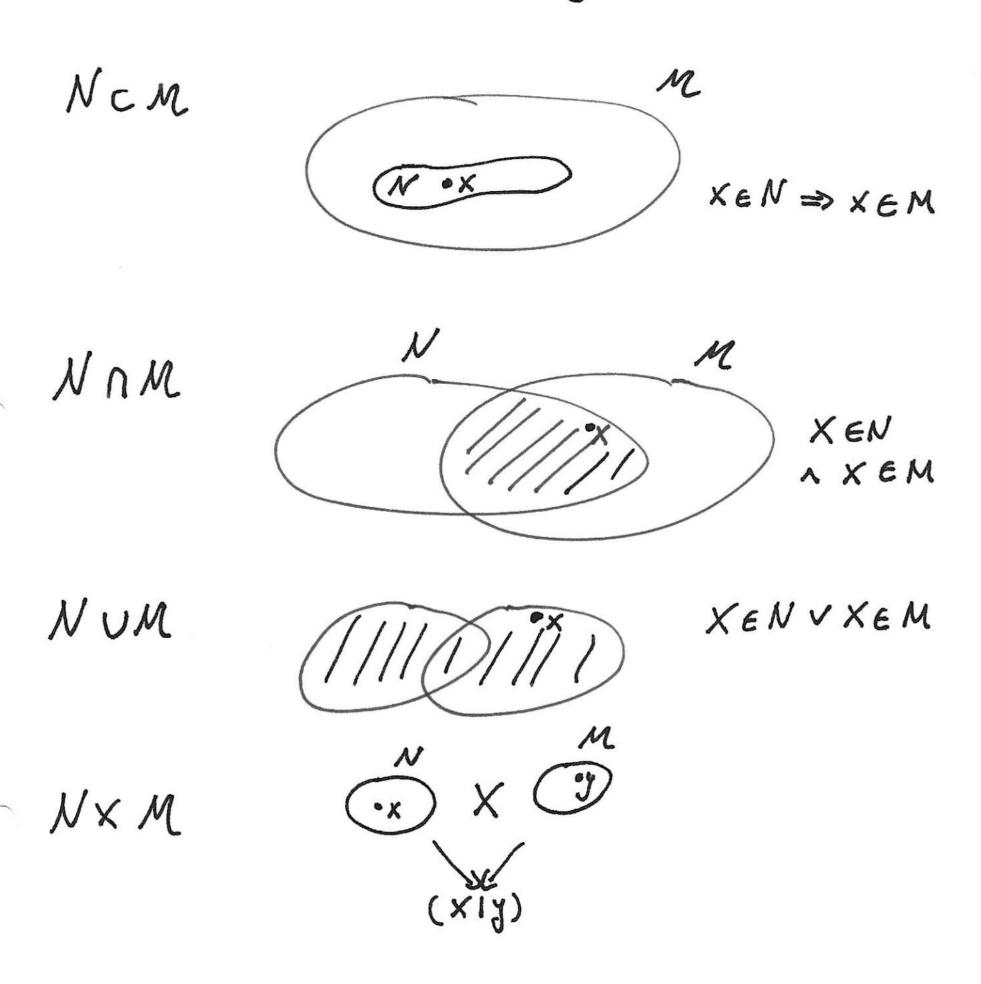
I.1 Mengen - Notationen

- ▶ Auflistung: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, Element: $3 \in \mathbb{N}$
- ► Eigenschaftsaussagen: $\mathbb{N} = \{n \mid n = 1 \lor \exists m \in \mathbb{N} : n = m + 1\}$ (rekursiv)
- ▶ Menge von Mengen: $M = \{\{\text{Otto}, \text{Karl}\}, \{(0|1), (3|2)\}\},\ 1 \notin M, (0|1) \notin M$, $\{(0|1), (3|2)\} \in M$
- ▶ Die **leere Menge** $\emptyset = \{\}$ hat kein Element, $0 \notin \emptyset$
- Als **Mächtigkeit** einer Menge bezeichnet man die Anzahl der Elemente: $|\{3,5,2888\}|=3, |\emptyset|=0, |\mathbb{N}|=\infty$

I.1 Mengen - Relationen TAFEL003

- ▶ Teilmenge $x \in N \subset M : \Leftrightarrow x \in N \Rightarrow x \in M$
- ▶ Schnittmenge $x \in N \cap M : \Leftrightarrow x \in N \land x \in M$
- **Vereinigungsmenge** $x \in N \cup M$:⇔ $x \in N \lor x \in M$
- ▶ Die **Produktmenge** $(x,y) \in N \times M : \Leftrightarrow x \in N \land y \in M$
- Die Potenzmenge einer Menge ist die Menge aller ihrer Teilmengen.
- Warnung: Es gibt logisch unhaltbare Mengenbildungen wie die Menge aller Mengen
- ► Mengen werden **axiomatisch**, d.h. über widerspruchsfreie Eigenschaften,
- oder konstruktiv, d.h. durch bekannte Regeln aus Vorherigem gebildet.

TAFEL 003



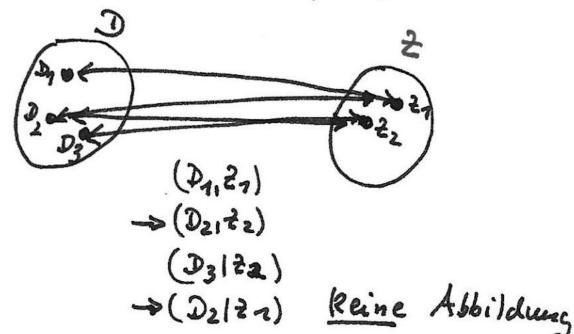
Potent menge
$$\pm u$$
 $\{1,2,3\} = M$ $|M| = 3$
 $P(M) = \{\emptyset, M, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ $|P(M)| = 2^{|M|} = 2^{8}$

I.1 Mengen - Abbildungen TAFEL004

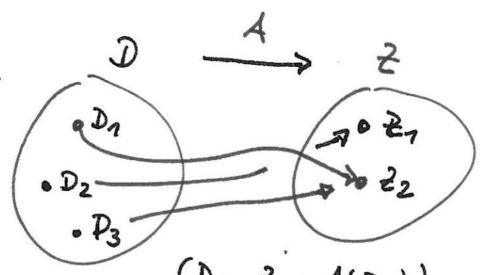
- ► Teilmengen von **Produktmengen** heißen **Relationen**: $R \subset D \times Z$, $(x,y) \in R$
- ▶ **Abbildungen** $A:D \to Z$ sind Relationen mit eindeutiger Zuordnung $x \mapsto y = A(x)$
- ► Eine Abbildung A heißt **injektiv** $:\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow A(x_1) \neq A(x_2)$
- ► Eine Abbildung A heißt surjektiv : $\Leftrightarrow A(D) = Z$
- ▶ Eine Abbildung A heißt **bijektiv** (umkehrbar eindeutig) : $\Leftrightarrow A$ ist injektiv und surjektiv.
- Für bijektive Abbildungen gibt es eine **Umkehrabbildung** A^{-1} mit: A(x) = y und $A^{-1}(y) = x$.
- Als **Verkettung** (Hintereinanderausführung) zweier Abbildungen $A: M \to N, B: N \to O$ wird definiert: $B \circ A: M \to O, x \mapsto B(A(x))$

TAFEL 004-a)

Relationen



Abbildungen

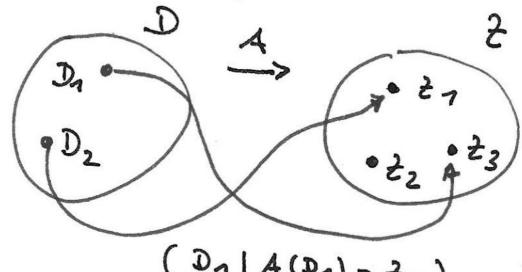


$$(D_{1}) \frac{2}{2} = A(D_{1})$$

$$(D_{2}) \frac{2}{2} = A(D_{2})$$

$$(B_{3}) \frac{2}{2} = A(D_{3})$$

in jektio



$$(D_1 | A(D_1) = \frac{2}{3})$$

 $(D_2 | A(D_2) = \frac{2}{3})$

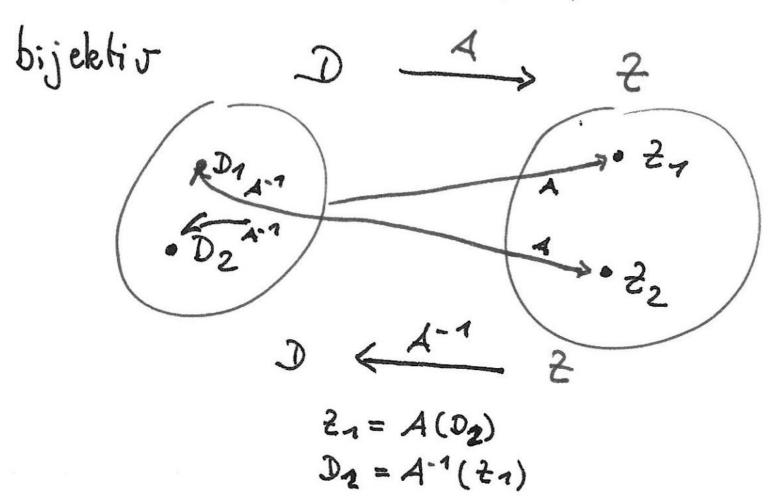
Da Da 23 # 27 22 ohne nicht bijekhior

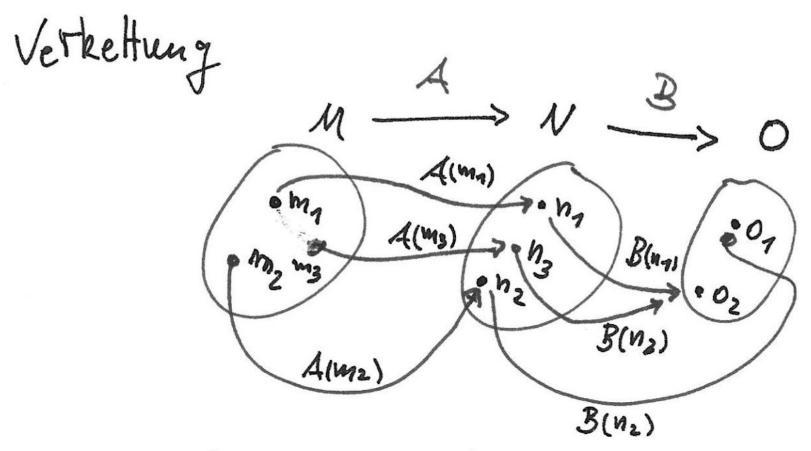
A(D)=2

surjektiv

 $\begin{array}{c|c}
\hline
0 & D_1 & D_2 \\
\hline
0 & D_2 & D_3
\end{array}$

TAFEL 004-6)





$$B(A(m_1)) = O_2$$

 $B(A(m_2)) = O_1$
 $B(A(m_3)) = O_2$

I.2 Gruppen

Die elementarste Struktur in der Mathematik heißt **(Halb-) Gruppe** (G, \circ) . Sie wird für eine Menge G mit einer Abbildung \circ axiomatisch (durch ein widerspruchsfreies Regelwerk) festgelegt.

- ▶ Verknüpfung $\circ: G \times G \to G, \, (g,f) \mapsto g \circ f$
- ▶ Assoziativ $\forall g, f, h \in G : (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$
- ▶ Neutrales Element $\exists e \in G : g \circ e = e \circ g = g$
- ▶ Inverses $\forall g \in G \ \exists g^{-1} \in G : g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$ (Nicht bei Halb-Gruppen!)
- ▶ Kommutative Gruppe falls zusätzlich gilt: $\forall g, f \in G : g \circ f = f \circ g$ (auch "Abelsche Gruppe") TAFEL005

TAFEL 005

(No,+) als Halb-Gruppe

 $N_1 + N_2 = N_3$ ($\sqrt{n_2} + \frac{1+\cdot +1}{n_2} + \frac{1+\cdot +1}{n_2} = N_3$)

 $(N_1+N_2)+N_3 = \frac{1+...+1}{N_1} + \frac{1+...+1}{N_2} + \frac{1}{1+...+1} + \frac{1}{1+...+1}$

de e Denn nto = n Det. von o

Kommutativ auch 1+1+1 = 1+1+2 2.B.

Invases nicht immer 8+n=0 n&1No.

aber (2,+) ist eine kommutative Gruppe

Auch G={0,1} mit "+"

0+1=1=1+0

1+1 =0

0+0 =0

ist evice Gruppe (abelsete)

0= e

1 = 1-1

0 = 0-1

I.3 Zahlenmengen $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3 ...\}$ mit + als Verknüpfung eine kommutative Halbgruppe, 0 ist Neutrales El.
- ▶ $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...\}$ mit + als Verknüpfung eine kommutative Gruppe, Inverses zu z als -z bezeichnet. -0 = 0.
- ▶ Zusätzliche Verknüpfung · auf \mathbb{Z} , z.B rekursiv über $z_1 \cdot (z_2 + 1) = z_1 \cdot z_2 + z_1 = (z_2 + 1) \cdot z_1$.
- $ightharpoonup (\mathbb{Z},\cdot)$ mit 1 als Neutrales ist Halb-Gruppe.
- Inverses zu z als z^{-1} oder $\frac{1}{z}$ bezeichnet erweitert $\mathbb Z$ zu $\mathbb Q = \left\{ \frac{p}{q} | p, q \in \mathbb Z, q \neq 0 \right\}$
- ▶ 0 hat kein Inverses bzgl. · warum? nicht eindeutig!
- ► + und · sind über das **Distributivgesetz** verknüpft!
- $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

I.3 Zahlenmengen $\mathbb Q$ und $\mathbb R$

- $\mathbb{Q},+,\cdot)$ 2 Verknüpfungen mit jeweils Gruppenstruktur, über das Distributivgesetz verknüpft. Neutrales Element zu + hat kein Inverses zu \cdot : **Algebraische Struktur** heißt **Körper**.
- Im Körper hat $a\cdot x+b=c$ $(a\neq 0)$ genau eine Lösung $x=\frac{(c-b)}{a}$
- $ightharpoonup x^2=a$ hat aber nicht immer Lösungen in \mathbb{Q} , $\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$
- Aber $\mathbb Q$ hat eine **Ordnungsstruktur** a < b mit Trichotomie: $(a < b) \dot{\lor} (a = b) \dot{\lor} (b < a)$ Vergleichen der Zähler bei gemeinsamen Nennern, n+1>n Transitivität: $a < b \land b < c \Rightarrow a < c$ Verträglichkeit mit +, \cdots $a < b \Rightarrow a + c < b + c$; $a < b \land c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
- ▶ Durch **Abstände** |b-a|=b-a wenn >0, sonst |b-a|=a-b eine **Topologiestruktur** (Umgebungsstruktur)

I.3 Zahlenmengen \mathbb{Q} , \mathbb{R}

▶ **Häufungspunkt**: a ist ein Häufungspunkt einer Folge $a_0, a_1.a_3...$ wenn ab einem n_0 alle Werte a_n in einer beliebig kleinen Umgebung von a liegen:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n > n_0 : |a_n - a| < \epsilon.$$

- $ightharpoonup \sqrt{2}$ beliebig genau in $\mathbb Q$ approximierbar
- $ightharpoonup \sqrt{2}$ ein Häufungspunkt der immer genaueren Approximationsfolge
- ▶ **Abschluss**(=Menge aller Häufungspunkte) von $\mathbb{Q} = \text{K\"{o}}$ rper der reelen Zahlen \mathbb{R}

$$\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$$

- ▶ Leider nicht alle **algebraischen Gleichungen**, z.B $x^2 + 2 = 0$, in $\mathbb R$ lösbar.

 \blacktriangleright Die zweidimensionale Zahlenmenge $\mathbb C$ erfüllt als Körper den Hauptsatz der Algebra. Jedes Polynom vom Grad n

$$a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

hat n Lösungen $z_1, \ldots z_n$ (mehrere können gleich sein).

Es gilt dann die **Linearfaktorzerlegung**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{l=1}^{n} (z - z_l)$$

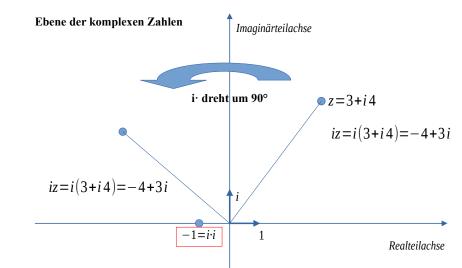
▶ Die Idee dazu: i als Drehung um 90° in einer **Zahlenebene**

$$i \cdot 1 = i : i \cdot i = -1 : i \cdot -1 = -i : i \cdot -i = 1$$

$$\sqrt{-1} = i$$

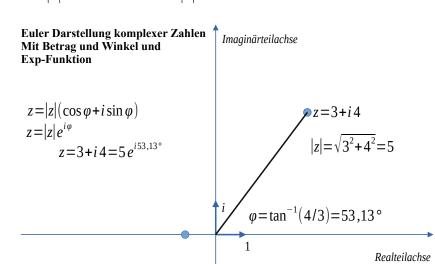
da $i \cdot i = -1$

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$$
 als Körper mit $+$ und \cdot

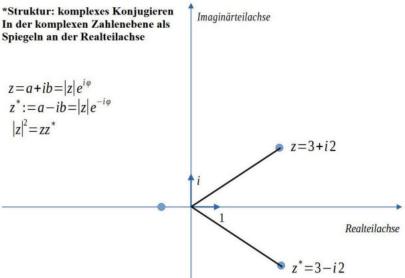


Durch die **Eulerdarstellung** $z=|z|e^{\imath\varphi}=|z|(\cos\varphi+\imath\sin\varphi)$ Gleichungen leichter lösen; z.B

Gleichungen leichter lösen; z.B
$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i(\varphi + 360^\circ)/2} = \pm |z|^{1/2} e^{i(\varphi)/2}$$



Neben Vorzeichenwechsel in $\mathbb C$ eine weitere zweiwertige Operation mit "Betragseffekt": *-Operation des komplexen Konjugierens



II. Vektorräume

- II.1 Einführung
- II.2 Linearkombination von Vektoren
- II.3 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension
- II.4 Lineare Objekte und Beziehungen (→ LGS)

II.1. Einführung

Vektorräume als algebraische Struktur für **parallel verarbeitbare** Problemlösungen. Vektoren durch Listen von Zahlen darstellbar

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

mit denen man für jede Komponente v_k der Liste auf gleiche (parallele) Weise rechnen kann.

(1) \vec{v} könnte **Lagerbestand** an Stückzahlen (negative Zahl = fehlend) bei 4 unterscheidbaren Produkten sein. Ein-Ausgänge durch komponentenweise Addition/Subtraktion

II.1 Einführung

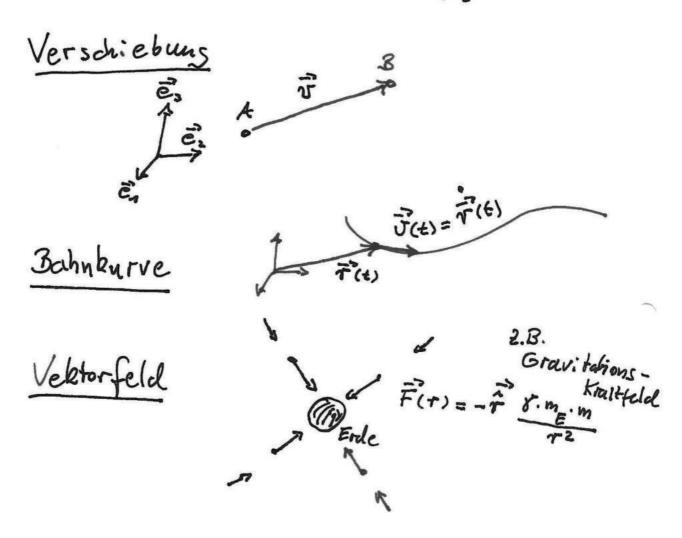
- (2) \vec{v} mit nur drei Komponenten könnte eine **Verschiebung** zwischen zwei Punkten im Raum sein
- (3) \vec{v} mit nur drei Komponenten könnte eine **physikalische Größe** sein wie Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft oder elektrisches Feld, die **im Raum an jeder Stelle** durch eine **Stärke und eine Richtung** charakterisiert sind: **Vektorfelder**
- (4) \vec{v} könnte einen **Zustand** mit 4 unterscheidbaren Eigenschaften irgendeines veränderlichen Systems beschreiben.

II.1 Einführung

Bei (1) und (4) steht die **zeitliche Veränderung** der Vektoren im Fokus (Dynamik), die durch lineare Abbildungen, dargestellt durch **Matrizen**, beschrieben werden. Das steht bei **stochastischen Prozessen** und in der **Quantenmechanik** im Vordergrund.

Bei (2) und (3) stehen die rechnerischen Verknüpfungen wie Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation und Kreuzprodukt im Fokus, was auch der Schwerpunkt in der klassischen Physik (Mechanik, Elektrodynamik als Vektorfeldtheorie) ist. Zeitliche Veränderungen (Dynamik) durch Differentialgleichungen für Bahnen im Raum bzw. für die Vektorfelder. TAFEL006

TAFEL 006a



Dynamih für Zustände

+ lineare Abbildung Generator der Zeitentwicklung (Quantentheorie bzw. Stochashische

G 2.8.
$$\binom{30\%}{70\%} \binom{30\%}{90\%} G \binom{1}{0} = \binom{0.3}{0.7}$$

When you are was to the indictable tem

übergangswarmcheinlich bei fen

Tafel 0066

Für Bahnburven $\underline{T}(t) = \frac{1}{m} \overline{F}(\overline{F}, \overline{v}, t)$ Newton gewöhnliche Differentialgleichungen BWGL under Zeit für Vektorwertise Funktionen der Zeit

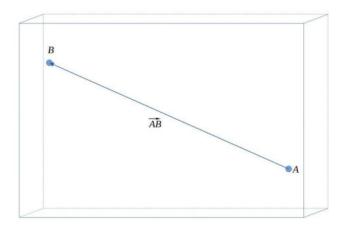
Für Vektorfelder

partielle Differential gleichungen in Ort und zeit Z.B. Maxwell-Gleichungen für Ē(rit); B(rit) elebb.; mayn. Feld

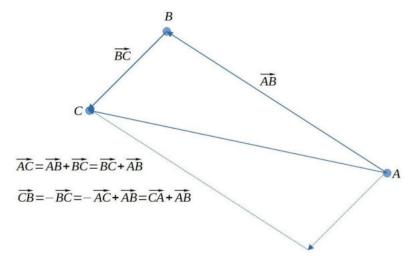
2.b. $\partial_{\vec{r}} \times \vec{E}(\vec{r},t) = -\partial_t \vec{B}(\vec{r},t)$ 3nduktionsgesetz

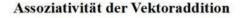
 $\label{eq:Veranschaulichung} Veranschaulichung der Verknüpfungen + und \cdot in Vektorräumen \\ durch \textbf{Verschiebungsvektoren} \ im \ Anschauungsraum.$

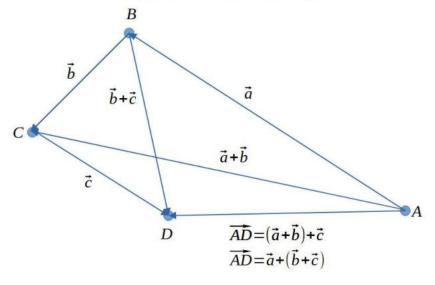
$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$



"Schaft an Spitze" definiert **Vektoraddition**. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; Gegenvektor $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$; Nullvektor $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$







Wir schließen: Verschiebungsvektoren mit der Addition bilden eine kommutative (abelsche) Gruppe:

(Assoziativität)
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$
.

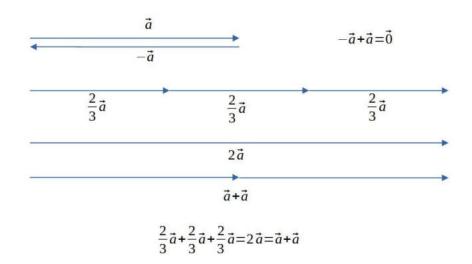
(Existenz eines Neutralen Elements)
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$
.

(Existenz eines Inversen Elements zu jedem Element)

$$-\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}.$$

(Kommutativität)
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
.

Diese vier (V,+)-Regeln sind für alle Vektorräume definierend.



Das Multiplizieren eines Vektors mit einer reelen Zahl λ wird als Strecken-Stauchen-Spiegeln eingeführt. Für eine rationale Zahl $\lambda=p/q$ mit $p,q\in\mathbb{N}$ definieren wir $\lambda\cdot\vec{a}$ implizit durch die Forderung aus der Abbildung vorher:

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{p}{q} \cdot \vec{a} = \sum_{l=1}^{p} \vec{a} . \quad (*)$$

Die Multiplikation mit -1 wird als Spiegelung, d.h. als Gegenvektor eingeführt.

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

Die Multiplikation soll assoziativ sein: $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$ und es soll keinen Unterschied machen, ob wir die Zahl vor den Vektor oder den Vektor vor die Zahl schreiben, $\vec{a} \cdot \lambda := \lambda \cdot \vec{a}$.

¹Jede reelle Zahl lässt sich beliebig genau durch eine rationale Zahl approximieren.

Folgende Regeln machen (V,+) zu einem **Vektorraum** $(V,+,\cdot)$ über einem Körper \mathbb{K} : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

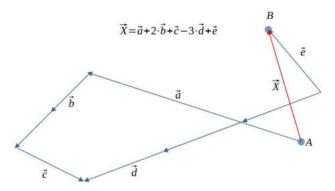
(Linearität 1)
$$\dot{\lambda} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$

(Linearität 2)
$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$$

(Existenz eines neutralen Elements)
$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

(Assoziativität)
$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$$

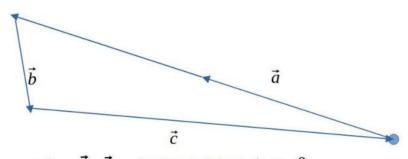
Vektoren durch Linearkombinationen beschreibbar.



Von Bedeutung: Wie viele Vektoren (die nicht $\vec{0}$ sind) nötig für $\vec{X}=0$?

$$\vec{X}\!=\!2\!\cdot\!\vec{a}\!+\!\vec{b}\!+\!\vec{c}\!=\!\vec{0}$$

$$\vec{c}\!=\!-\!\left(2\!\cdot\!\vec{a}\!+\!\vec{b}\right) \text{ ist linear abhängig von } \vec{a}\,,\vec{b}$$



$$t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{0}$$
 ist nur möglich mit $t = s = 0$
 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sind linear unabhängig

Definition: n Vektoren $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn

$$\left[\forall \{\lambda_k\}_{k=1,\dots,n} \text{ mit } \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}\right] \Rightarrow \lambda_k = 0.$$

Zwei linear abhängige Vektoren sind Vielfache voneinander, also **parallel**.

Es gilt ein (nicht ganz leicht zu beweisender) Satz:

In jedem Vektorraum gibt es immer eine größtmögliche Anzahl \boldsymbol{d} linear unabhängigen Vektoren.

d heißt die **Dimension** des Vektorraumes.

Es gibt auch unendlichdimensionale Vektorräume, z.B.

Vektorräume von Funktionen (siehe Übung).

In einem n-dimensionalen Vektorraum kann daher jeder Vektor \vec{v} als Linearkombination von n linear unabhängigen Vektoren $B:=\{\vec{a}_k\}_{k=1,\dots,n}$ dargestellt werden (TAFEL007):

$$\exists \{v_k\}_{k=1,...,n} \text{ mit } \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \vec{a}_k.$$

Die Zahlen $\{v_k\}_k$ in einer Spalte angeordnet repräsentieren dann den Vektor \vec{v} in der **Basis** B und heißen **Komponenten** oder **Koordinaten** des Vektors \vec{v} in der Basis B.

Beispiel d=3: $\vec{v}=v_1\cdot\vec{a}_1+v_2\cdot\vec{a}_2+v_3\cdot\vec{a}_3$

$$\vec{v} = \left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\right)_{\mathbf{B}}$$

Bei Wechsel der Basis ändern sich auch die Komponenten!

TAFEL 007

Su jaille 1 Basis

Nimm - 3 als Vektor hinzu, Dann

 $\exists \ \{ J_R \}_{R=1...n}$ mit $\sum_{k=1}^n J_k \vec{a_k} - \vec{b} = \vec{\sigma}$

so dass nicht alle Jk=0 sind (wil Basisn-ii' nicht mehr linear unabhänzig)

=> v= Z vak mit vh nicht alle o

Fist durch du Jr in der Basis

"dargestellt", als Spaltenvehter (5, Jn/B

Andere Basis - andere Komponenten! 2.B. d=2 {a, a, a, sei Basis

 $\vec{a}_1' := \vec{a}_1 + \vec{a}_2'$ ist eine andere Basis $\vec{a}_2' := \vec{a}_2 - \vec{a}_1$

in {\ain, ai} \= B lantet \ain = 1. \ain + 0 \ain : (7) B

aber in $\{\vec{a_1}',\vec{a_2}'\}=B'$ lautet $\vec{a_1}=\frac{1}{2}(\vec{a_1}'-\vec{a_2}'): \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}B'$

Die Rechenregeln von vorher bewirken: Alles geschieht komponentenweise gleich:

$$s\vec{v} + t\vec{w} = \begin{pmatrix} sv_1 + tw_1 \\ sv_2 + tw_2 \\ sv_3 + tw_3 \end{pmatrix}_{\mathbf{B}}.$$

In Summenschreibweise für d beliebig:

$$s\vec{v} + t\vec{w} = \sum_{k=1}^{d} (sv_k + tw_k)\vec{a}_k,$$

(· zwischen Zahlen und Buchstaben bzw. zwischen Buchstaben weglassen)

Die Menge aller möglichen Linearkombinationen aus m Vektoren eines Vektorraumes V heißt **lineare Hülle** dieser Vektoren,

$$\operatorname{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) := \left\{ \sum_{k=1}^m a_k \vec{v}_k | a_k \in \mathbb{K} \right\}$$

Für linear unabhängige v_k ist $\mathrm{span}\left(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m\right)$ ein m-dimensionaler **Untervektorraum** von V. Die lineare Hülle einer Basis von V ist V, $\mathrm{span}\,\mathbf{B}=V$. Die Koeffizienten a_k eines Vektors \vec{w} in einer linearen Hülle sind Lösung eines **lineares Gleichungssystems** (LGS)

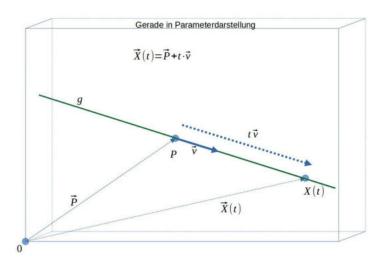
$$\sum_{k=1}^{m} a_k \vec{v}_k = \vec{w}$$

Die Koeffizientenmatrix M_{kl} eines Basiswechsels $B \to B'$ ist Lösung des LGS

$$\vec{a}_k = \sum_{l=1}^n M_{kl} \vec{a'}_l$$

Geraden g im Vektorraum als Abbildungen $t \in \mathbb{R} \mapsto \vec{X}(t)$ darstellbar.

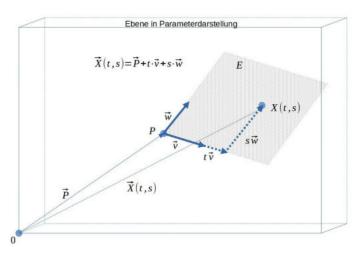
Aufpunktvektor $\vec{P} + t$ · Richtungsvektor \vec{v} :



In Koordinaten in d=3 sei eine Gerade

$$g: \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ebenen E durch Abbildungen $(t,s)\in\mathbb{R}^2\mapsto \vec{X}(t,s)$ darstellbar. Stützvektor $\vec{P}+t\cdot$ Spannvektor $\vec{v}+s\cdot$ Spannvektor \vec{w} :



In Koordinaten sei eine Ebene E so:

$$E: \vec{X}(t,s) = \begin{pmatrix} 20\\ -4\\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0\\ -10\\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -10\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$$

Als Beispiel einer Beziehungsaufgabe: Haben E und g gemeinsame Punkte? Dazu $\vec{X}(t)$ von g und $\vec{X}(r,s)$ von E komponentenweise gleichsetzen (\rightarrow LGS)

$$2+t = 20+0r-10s$$

$$-1-t = -4-10r+0s$$

$$0+3t = 0+r+s$$

Sortieren: Variablen in der Reihenfolge r,s,t links und Zahlen (Faktor 1) rechts.

Das LGS durch eine **Matrix** eindeutig dargestellt: Spalten zu Variablen von links nach rechts als r,s,t,1. Erlaubte - die Lösungsmenge nicht verändernde - **Transformationen** sind: (1) Multiplikation der gesamten Zeilen mit Zahlen ($\neq 0$) und (2) Additionen/Subtraktionen von Zeilen.

Wähle die Transformationen so, dass sukzessive 0 in die Matrix kommt, bis zu einer **Dreiecksform** - oder noch besser - **Diagonalgestalt**. An der Diagonalgestalt liest man die Lösung ab. Dieses Vorgehen **Gauss-Algorithmus** kennen Sie aus der Schule. Es ist äußerst robust und auf beliebig große LGS anwendbar. Natürlich auch mit Unterstützung durch elektronische Rechner. Im Internet kann man z.B. online RREF aufrufen. Für die Eingabe

$$M = \left(\begin{array}{cccc} 0 & -10 & -1 & -18 \\ -10 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

lautet die Ausgabe-Matrix (TAFEL008)

$$\operatorname{Rref} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0, 25 \\ 0 & 1 & 0 & 1, 75 \\ 0 & 0 & 1 & 0, 5 \end{pmatrix} r = -0, 25; s = 1, 75; t = 0, 5.$$

$$\vec{X} = 2,5\vec{a}_1 - 1,5\vec{a}_2 + 1,5\vec{a}_3.$$

mit Spaltenreihung r, s, t, 1

TAFEL 008

Tst1

0-10-7-18

-10 0 1 3 Umsortieren

1 1 -3 0

T s t 1

7 S t 1 1 1 -3 0 7.10 -10 0 1 3] + 0 -10 -7 -18

1 1 -3 0 0 10 -23 3 7+

0 10 -29 3 7 -10

10 0 -1 -3 7 · 2 0 10 -29 3] + 0 0 2 1

2040 0 -51 :-5 0 10 -29 3 7:2+ 0 0 2 7 7:29+

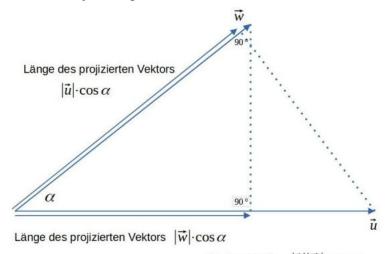
Rechnergestützten Methoden nutzen optimierte Algorithmen Cramersche Regel folgt noch

Händisch geeignet ist das Gauss-Verfahren - hier noch zwei Beispiele

III. Euklidische Vektorräume

III.1 Skalarprodukt für Längen und Winkel III.2 Orthonormale Basen III.3 Kreuzprodukt und Spatprodukt in 3D III.4 Hermitesches Skalarprodukt über $\mathbb C$

Längen $|\vec{u}|, |\vec{w}|$ und Winkel α zwischen zwei Vektoren \vec{u}, \vec{v} sind im **Skalarprodukt** gespeichert. Das ist eine Zahl (Skalar), die durch senkrechte Projektion gebildet wird.



Skalarprodukt:

Die Definition lautet dazu:

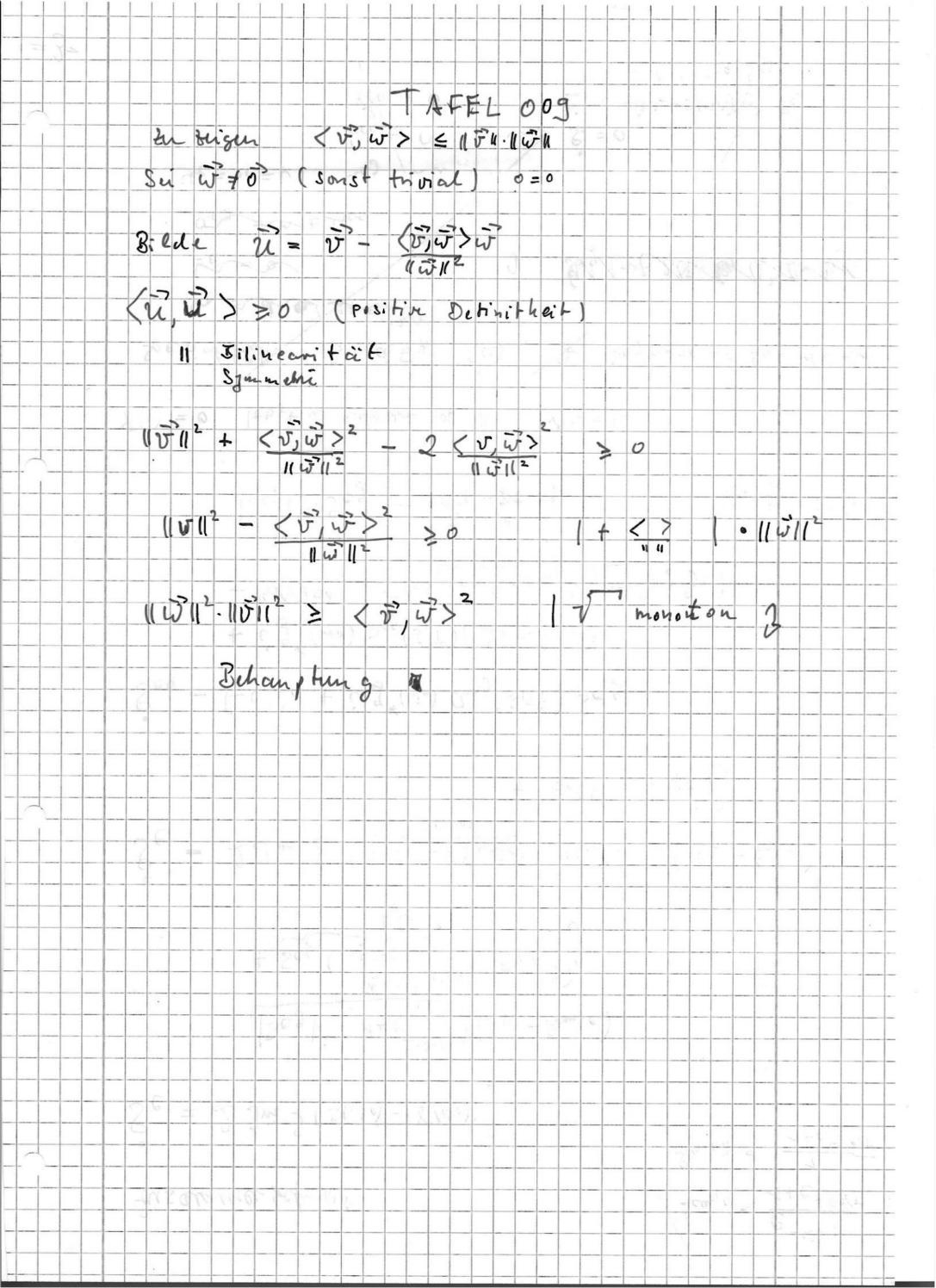
$$\vec{u} * \vec{v} := |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha.$$

Als Schreibweisen findet man auch andere Multiplikationszeichen oder Klammern, z.B. $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$; $(\vec{u}; \vec{v})$. Um Eindeutigkeit und Symmetrie bezüglich der beiden Vektoren zu gewährleisten, wird der Winkel im Gradmaß auf $\alpha \in [0; 180^{\circ}]$ bzw. im Bogenmaß auf $\alpha \in [0; \pi]$ beschränkt. Die wichtigen geometrischen Eigenschaften, die man aus der Definition ablesen kann sind: Die **Länge** eines Vektors ist gegeben als $v := |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} * \vec{v}}$. Zwei endlich lange Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet (Sie haben keinen Projektionsanteil aneinander): $\vec{v} * \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$. Für zwei **parallele** Vektoren ($\alpha = 0, \pi$) gilt: $\vec{v} * \vec{w} = \pm vw$. Da $\cos \alpha$ betraglich immer in [0, 1] liegt, gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\vec{v}*\vec{w}| \leq vw$.

Die daraus ableitbaren Eigenschaften kann man umgekehrt als axiomatische Struktureigenschaften eines Skalarproduktes definieren; Längen und Winkel sind dann daraus abgeleitet.

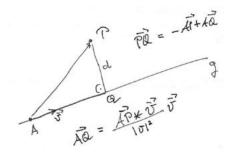
 $(\vec{v}, \vec{w}) \in V \times V \mapsto \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \in \mathbb{R}$ mit

- ▶ (Symmetrie) $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$.
- ▶ (Bilinearität) $\langle (s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2), (r\vec{w}_1 + u\vec{w}_2) \rangle = sr \langle \vec{v}_1, \vec{w}_1 \rangle + tr \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle + su \langle \vec{v}_1, \vec{w}_2 \rangle + tu \langle \vec{v}_2, \vec{w}_2 \rangle.$
- ▶ (positive Definitheit) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \ge 0$; $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$.
- ► Ein Vektorraum mit Skalarprodukt, heißt **Euklidischer Vektorraum**.
- ► Ein Punktraum mit Euklidischem Vektorraum als Verschiebungsvektorraum heißt **Euklidischer Raum**
- Das Skalarprodukt induziert eine Norm auf dem Euklidischen Raum, die Abstände definiert
- $\vec{v} \in V \mapsto ||\vec{v}|| := \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^{1/2} \in \mathbb{R}_+$
- \blacktriangleright Es gilt dann Cauchy-Schwarz: $|\left<\vec{v},\vec{w}\right>| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$ TAFEL009
- ▶ Winkel definiert über $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = ||\vec{v}|| ||\vec{w}|| \cos \alpha$



- 2 Anwendungsbeispiele des Skalarproduktes (Übung):
- 1.) momentane Leistung als Skalarprodukt zwischen der Kraft auf einen Körper und seiner momentanen Geschwindigkeit $P(t) = \left\langle \vec{F}(t), \vec{v}(t) \right\rangle$. Arbeit ist das Integral über die Leistung, $\int_{t_0}^t P(s) ds$

2.) Bestimmung des **kürzesten (=senkrechten) Abstandes** eines Punktes P von einer Geraden g. Wir projizieren den Verschiebungsvektor \overrightarrow{AP} vom Aufpunkt A zum Punkt P der Geraden g in Richtung des normierten Richtungsvektors \overrightarrow{v} . Dort erreichen wir den Punkt Q auf der Geraden.



 $\overrightarrow{AQ} = \frac{\left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{v} \right\rangle}{\|v\|^2} \overrightarrow{v} \,. \quad PQ \text{ steht senkrecht auf der Geraden } g. \quad \text{Die Norm von } \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} \text{ ist dann der gesuchte Abstand}.$

III.2 Orthonormale Basen

Kartesisches Koordinatensystem eines Euklidischen Raumes E ist neben der Wahl des Ursprungs die Wahl einer Orthonormalbasis (ONB) \to im Euklidischen Vektorraum V_E der Verschiebungsvektoren in E

$$\mathbf{E} = \{\vec{e}_k\}_{k=1,\dots,n}$$

mit der definierenden Eigenschaft:

$$\langle \vec{e}_k, \vec{e}_j \rangle = \delta_{kj}$$
.

Hierbei **Kronecker-Symbol** δ_{kj} abkürzend für $\delta_{kj}=0$, falls $k\neq j$, oder $\delta_{kj}=1$, falls k=j.

Bei einer ONB stehen die Basisvektoren paarweise aufeinander senkrecht und haben die Länge 1 (**Einheitsvektoren**).

Einheitsvektor zu einem Vektor: $\hat{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$. Dann ist $\|\hat{\vec{a}}\| = 1$.

III.2 Orthonormale Basen

Mit Darstellung von Vektoren in einer ONB $\vec{v} = \sum_{k=1}^n v_k \vec{e}_k$ hat das Skalarprodukt die aus der Schule bekannte Form (zur Übung)

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots v_n w_n = \sum_{k=1}^n v_k w_k.$$

In einer nicht-orthonormierten Basis treten gemischte Terme (wie $v_1w_2\vec{a}_1*\vec{a}_2$) auf und Faktoren $\vec{a}_i*\vec{a}_i$.

III.2 Orthonormale Basen

Wie macht man aus einer Basis eine ONB? Das Schmidt-Verfahren durch orthogonalen Projektionen und Normierung schafft es. (zur Übung)

Aus zwei linear unabhängigen Vektoren \vec{a}, \vec{b} zwei orthogonale bilden

$$\vec{b'} = \vec{b} - \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle}{\|a\|^2} \vec{a} \implies \left\langle \vec{a}, \vec{b'} \right\rangle = 0.$$

▶ Der l-te orthogonale Vektor \vec{a}'_l aus l-1 bereits orthonormierten Vektoren $\left\{\vec{e}_k\right\}_{k=1,\dots,l-1}$ und einem linear unabhängigen \vec{a}_l

$$\vec{a}'_l = \vec{a}_l - \sum_{l=1}^{l-1} \vec{e}_k \langle \vec{e}_k, \vec{a}_l \rangle$$
.

In 3D kann man einen senkrechten Vektor zu zwei linear unabhängigen Vektoren über das **Kreuprodukt** definieren: $V \times V \to V$; $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \times \vec{w}$ mit folgenden Eigenschaften

► (Antisymmetrie und Orientierung)

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$$
.

► (Bilinearität)

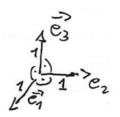
$$(s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2) \times (r\vec{w}_1 + u\vec{w}_2) = sr(\vec{v}_1 \times \vec{w}_1) + su(\vec{v}_1 \times \vec{w}_2) + tr(\vec{v}_2 \times \vec{w}_1) + tu(\vec{v}_2 \times \vec{w}_2).$$

> Es soll ein **Rechts-System** für eine ONB $\{\vec{e}_k\}_{k=1,2,3}$ bilden, d.h.

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \; ; \; \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \; ; \; \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

Die Wirkung des Kreuzproduktes auf ein ONB schreibt man kompakt mit dem **Levi-Civita-Symbol** ϵ_{ijk} :

$$\vec{e}_i imes \vec{e}_j := \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \,.$$



Es wechselt unter Vertauschung zweier Indizes das Vorzeichen und kennt nur Werte ± 1

 $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$; $\forall (ijk) : \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$ Insbesondere verschwindet es, sobald zwei Indizes gleich sind.

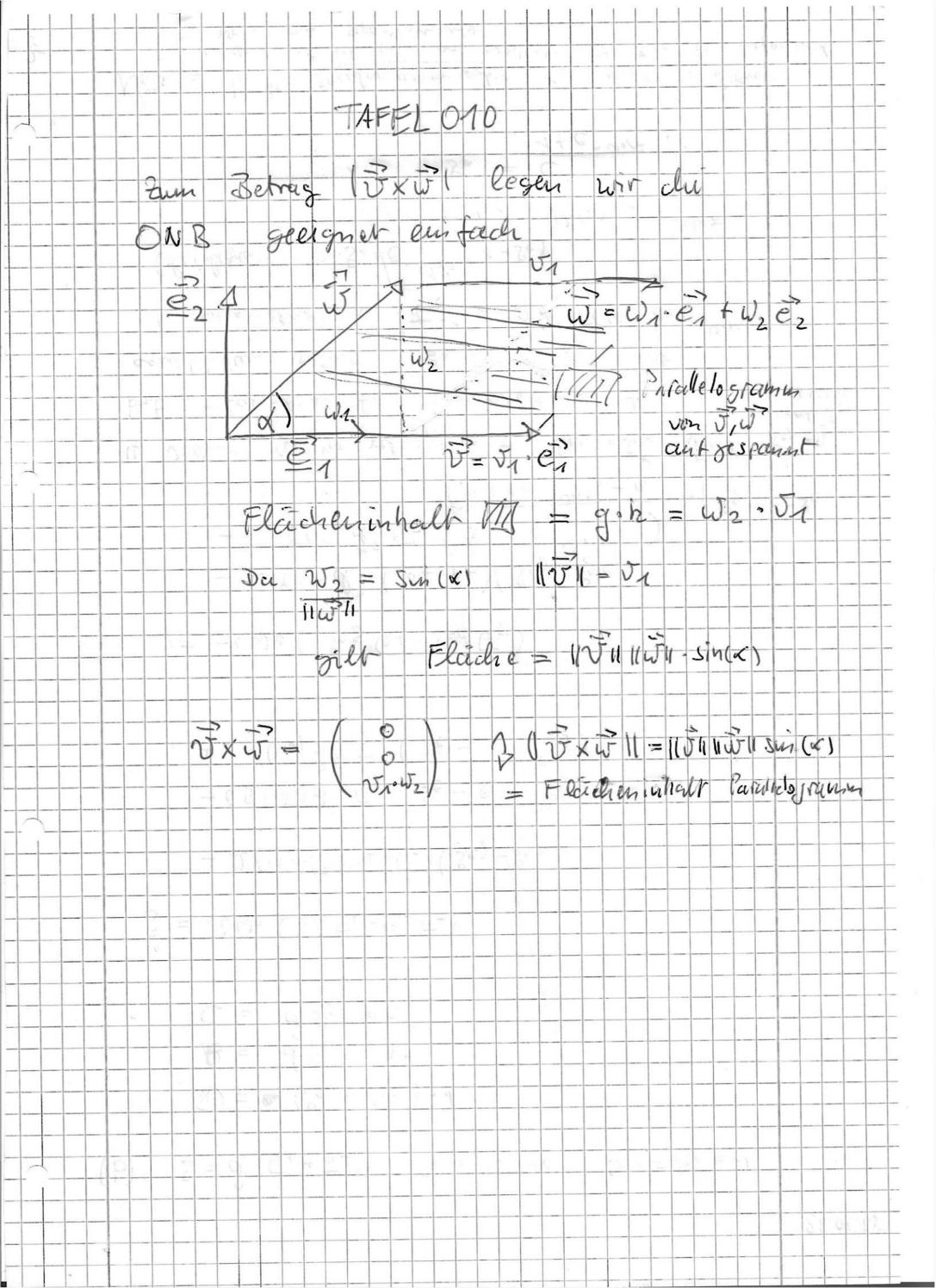
Damit gilt allgemein für die Komponenten in einer ONB (Übung):

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

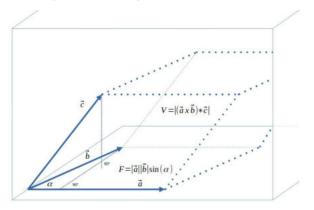
Der Betrag ergibt den **Flächeninhalt** des Parallelogramms, das von beiden Vektoren gebildet wird,

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha ,$$

wobei $\alpha \in [0;\pi]$ der Winkel zwischen den Vektoren ist. TAFEL010



Durch das Skalarprodukt des resultierenden Vektors von $\vec{a} \times \vec{b}$ mit einem dritten Vektor \vec{c} ergibt sich das **Volumen des Parallelepipeds** (Spat genannt) zu diesen drei Vektoren.



$$\mbox{\bf Spatprodukt } \left<(\vec{a}\times\vec{b}),\vec{c}\right> = F\cdot \mbox{H\"ohe} = \mbox{Volumen des Spates aus } \vec{a},\vec{b},\vec{c}$$

III.4 Hermitesches Skalarprodukt über $\mathbb C$

Mit dem Zahlenkörper $\mathbb C$ muss man die Axiome für das Skalarprodukt anpassen, um die positive Definitheit verträglich mit dem komplexen Konjugieren zu bekommen. Das Hermitesche Skalarprodukt:

- $(\vec{v}, \vec{w}) \in V \times V \mapsto \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \in \mathbb{C}$ mit
 - ► (Hermitizität) $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle^*$.
 - ► (Sesquilinearität) $\langle (s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2), (r\vec{w}_1 + u\vec{w}_2) \rangle = s^*r \langle \vec{v}_1, \vec{w}_1 \rangle + t^*r \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle + s^*u \langle \vec{v}_1, \vec{w}_2 \rangle + t^*u \langle \vec{v}_2, \vec{w}_2 \rangle.$
 - ▶ (positive Definitheit) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \ge 0$; $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$.
 - ▶ Das Hermitesche Skalarprodukt induziert eine Norm auf dem Raum, die Beträge definiert
 - $\vec{v} \in V \mapsto ||\vec{v}|| := \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle^{1/2} \in \mathbb{R}_+$
 - Die wichtigste Anwendung in der Physik ist in der Quantentheorie als komplexwertige Wahrscheinlichkeitsamplitude mit Interferenzeffekt: $|A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2|A_1| |A_2| \cos(\varphi)$

IV. Determinanten

IV.1 Determinante als orientiertes d-dim. Volumen IV.2 Axiome zur Determinante

IV.1 Determinante als orientiertes d-dim. Volumen

▶ Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in kartesischen Koordinaten als Spalten ergibt eine 3×3 quadratische Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige orientierte Spatvolumen ergibt sich zu

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_3) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

- ▶ Bilden die drei Vektoren ein Rechtssystem ist das **orientierte Volumen** positiv, andernfalls negativ.
- Bei linear abhängigen Vektoren verschwindet das Spatvolumen!

IV.1 Determinante als orientiertes d-dim. Volumen

Ausgedrückt durch die Matrixelemente m_{kl} , (k, l für die Zeilen- , Spaltennummer) wird das orientierte Spatvolumen als **Determinante der Matrix** M bezeichnet:

$$\det(M): = m_{11}m_{22}m_{33} + m_{21}m_{32}m_{13} + m_{31}m_{12}m_{23} - m_{11}m_{32}m_{23} - m_{21}m_{12}m_{33} - m_{31}m_{22}m_{13}.$$

► Mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols lässt sich das kompakt schreiben als (Leibniz-Formel)

$$\det(M) = \sum_{i=1, j=1, k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \cdot m_{1i} m_{2j} m_{3k}.$$

Auch für D=2 kann man die orientierte Fläche analog darstellen, $\det(M) = \sum_{i=1,j=1}^2 \epsilon_{ij} \cdot m_{1i} m_{2j} = m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21} \,,$ wobei das d=2 Levi-Civita-Symbol analog definiert ist (± 1 für 12 bzw. 21, 0 sonst).

IV.1 Determinante als orientiertes d-dim. Volumen

- Für d = 1 als orientierte Länge: $det(M) = m_{11}$,
- Mit allgemeinem Levi-Civita-Symbol für eine $d \times d$ symmetrische Matrix

$$\det(M) := \sum_{i_1, i_2, \dots i_d = 1}^d \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_d} m_{1 i_1} m_{2 i_2} \dots m_{d i_d}$$

mit $\epsilon_{12...d}=1$; auch alle mit gerader (ungerader $\cdot-1$) Anzahl an Vertauschungen erreichten Reihenfolgen und 0 bei mehrfach vorkommenden Ziffern in der Reihenfolge.

- Die Determinante wird in jeder Dimension als das d-dimensionale orientierte Volumen des Parallelepipeds der Spaltenvektoren aufgefasst.
- Das Verschwinden der Determinante ist ein sicherer Hinweis auf lineare Abhängigkeit von d (nicht-verschwindenden) Spaltenvektoren.

IV.2 Axiome zur Determinante

Aus der Leibniz-Formel bzw. aus orientiertem Volumen eine axiomatische Charakterisierung möglich.

- ► (Multilinearität 1) $\forall j \in \{1, ..., D\}$: $\det(\vec{a}_1 ... s \cdot \vec{a}_j ... \vec{a}_D) = s \cdot \det((\vec{a}_1 ... \vec{a}_j ... \vec{a}_D).$
- ► (Multilinearität 2)

$$\forall j \in \{1, \dots, D\} : \det \left(\vec{a}_1 \dots \vec{a}_j + \vec{b} \dots \vec{a}_D \right) = \det \left(\vec{a}_1 \dots \vec{a}_j \dots \vec{a}_D \right) + \det \left(\vec{a}_1 \dots \vec{b} \dots \vec{a}_D \right).$$

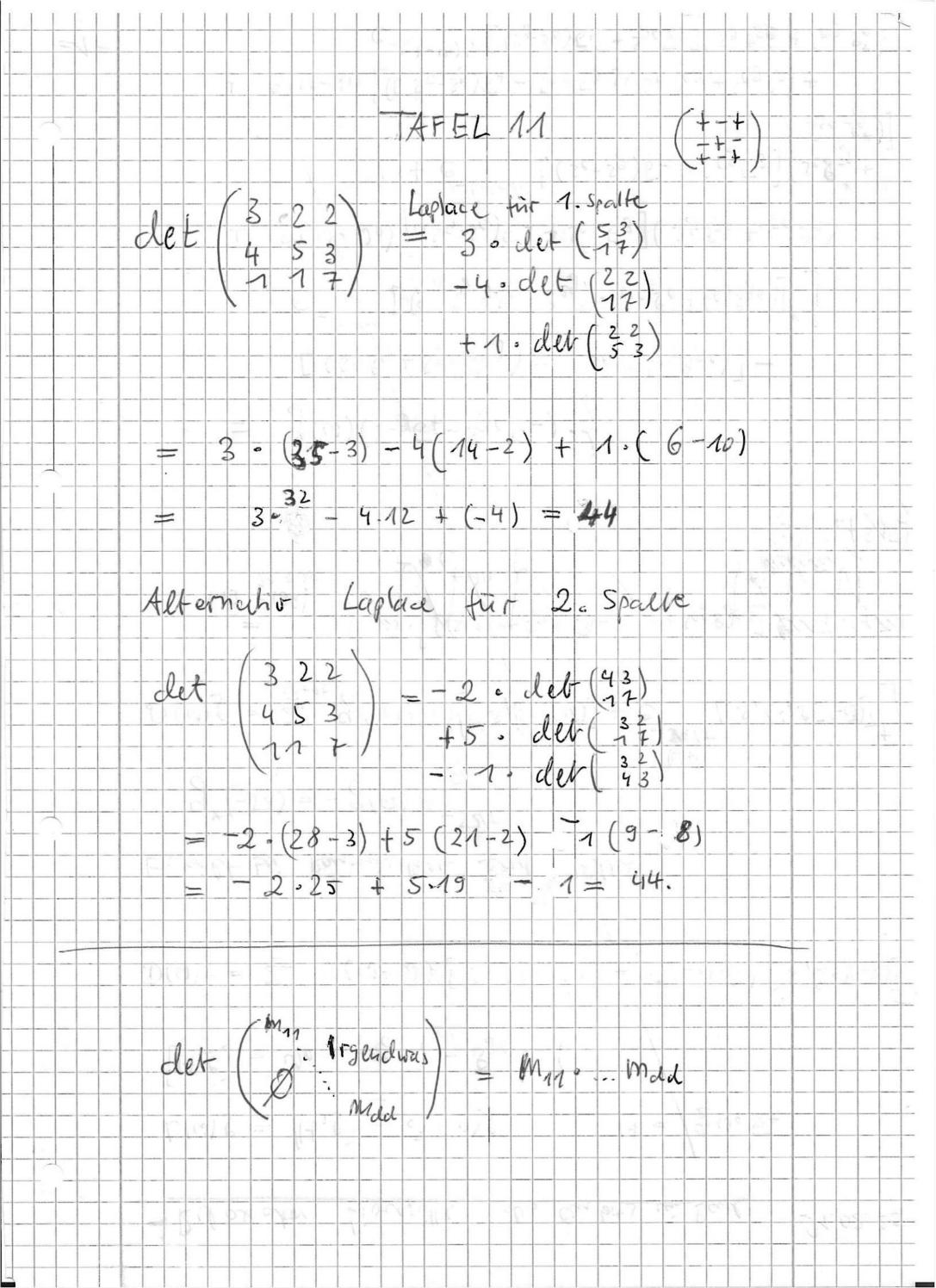
► (Alternierend) $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,D\}^2$: $\det(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_j \ldots \vec{a}_D) = -\det(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_j \ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_D)$.

IV.2 Axiome zur Determinante

Für d=1,2,3 leicht nachzurechnen ist der im allgemeinen d gültige **Determinanten-Entwicklungssatz** von Laplace:

$$\det(\vec{a}_1 \dots \vec{a}_d) = \sum_{k=1}^d (-1)^{1+k} a_{k1} \cdot \det(A_{k1}),$$

wobei A_{k1} eine $(d-1)\times(d-1)$ symmetrische Matrix ist, die durch Streichen der k-ten Zeile und 1-ten Spalte entstanden ist. TAFEL011



IV.2 Axiome zur Determinante

- Spalten kann man unter Beachtung des Alternierens durchtauschen und daher die Determinante bezüglich jeder Spalte entwickeln.
- ▶ Das Verfahren kann man iterieren, bis man bei d=1 landet und die Leibniz-Formel zurückgewinnt.
- ► Ein großer Vorteil der Laplace-Regel wird ersichtlich, wenn viele Matrixelemente Null sind.
- So ergibt sich z.B., dass Matrizen von Dreiecksgestalt als Determinante einfach das Produkt der Diagonalelemente haben!
- Spalten und Zeilen kann man auch vertauschen, da die Leibniz-Formel zeigt, dass die Determinante der transponierten Matrix M^{T} , $m_{ij}^{\mathrm{T}} := m_{ji}$, unverändert bleibt: $\mathrm{det}M^{\mathrm{T}} = \mathrm{det}M$.

V. Lineare Abbildungen und Lineare Gleichungssysteme

- V.1 Lineare Abbildungen mit Beispielen
- V.2 Matrixdarstellungen linearer Abbildungen
- V.3 Determinantenproduktsatz
- V.4 Matrizen für Projektionen, Streckungen, Drehungen
- V.5 Krummlinige Koordinaten: Zylinderkoordinaten
- V.6 Matrixmutiplikation und LGS, Inverse Matrix
- V.7 Eigenwerte und Eigenvektoren

V.1 Lineare Abbildungen mit Beispielen

▶ Eine **lineare Abbildung** $A:V\to W\: \vec{v}\mapsto A(\vec{v})=\vec{w}$ erhält die Vektorraum-Struktur,

$$A(s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2) = (sA(\vec{v}_1) + tA(\vec{v}_2)) \in W.$$

Sehr häufig handelt es sich um Abbildungen innerhalb des gleichen Vektorraums $A(\vec{v} \in V) \in V$.

▶ Beispiele für lineare Abbildungen: Strecken ,Stauchen, Spiegeln $A_s: \vec{v} \mapsto s\vec{v}$.

Basiswechsel $A_{\mathrm{B}\to\mathrm{B}'}: \vec{b'}_k = \sum_{l=1}^d m_{kl} \vec{b}_l.$ Orthogonale Projektion auf eine Richtung \hat{a} ,

P_{\hat{a}}(\vec{v}) := $(\vec{a} * \vec{v}) \cdot \vec{a}$.

Drehungen $D_{\vec{\alpha}}$ um eine Achse $\hat{\vec{\alpha}}$ mit dem Winkel α ,

 $D_{\vec{\alpha}}(\vec{v}) = \vec{v'}$ mit: die Komponente von $\vec{v'}$ in Achsrichtung ist unverändert zu der von \vec{v} , die Komponente von $\vec{v'}$ in der Ebene senkrecht zur Achse bildet mit der von \vec{v} einen Winkel

 α und $\|\vec{v'}\| = \|\vec{v}\|$. Abbildungsterme für Drehungen folgen

noch. • Eine **Verschiebung** um einen festen Vektor, $\vec{v} \mapsto \vec{v} + \vec{a}$ ist übrigens **keine** lineare Abbildung.

V.2 Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

- ▶ Beim Basiswechsel sieht man, dass die lineare Abbildung durch eine $d \times d$ Matrix mit Komponenten m_{kl} festgelegt ist.
- Ausgedrückt mit Hilfe von Basen ist jede lineare Abbildung durch Matrizen darstellbar! Im Folgenden sei V=W und eine ONB $\{\vec{e}_k\}_{k=1,\ldots,d}$ gegeben.
- **E**s reicht $A: V \to V$ auf die Basisvektoren zu kennen:

$$A(\vec{e}_l) = \sum_{k=1}^d \vec{e}_k \cdot a_{kl},$$

wobei d^2 Zahlen a_{kl} die lineare Abbildung festlegen.

► Man kann sie bei einer ONB auch durch Skalarmultiplikation mit der Basis berechnen:

$$a_{ml} = \vec{e}_m * A(\vec{e}_l)$$
. (LA – M)

V2. Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

▶ In Komponenten v_l eines Vektors $\vec{v} = \sum_{l=1}^d v_l \vec{e_l}$ lautet die Abbildungsvorschrift

$$A(\sum_{l=1}^{d} v_l \vec{e}_l) = \sum_{l,k=1}^{d} \vec{e}_k \cdot a_{kl} \cdot v_l,$$

Durch Skalarmultiplikation mit \vec{e}_m erhalten wir die m-te Komponente des Bildvektors

$$A(\sum_{l=1}^{d} v_l \vec{e_l})_m = \sum_{l=1}^{d} a_{ml} v_l$$
. (M1)

V2. Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

- ▶ Die Vorschrift (M1) lässt sich mit den a_{ml} als Matrix A und den v_l als Spaltenvektoren \vec{v} als **Matrixmultiplikation** einer Matrix mit einen Spaltenvektor definieren: $A(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$
- ightharpoonup Sie ist zeilenweise definiert wie eine Skalarmultiplikation zwischen einem Zeilenvektor der Matrix A und dem Spaltenvektor \vec{v} :

Zeile * Spalte

$$\begin{pmatrix} A(\vec{v})_1 \\ A(\vec{v})_2 \\ A(\vec{v})_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$A(\vec{e}_1)_2 = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot 0 = a_{21}$$

V.2 Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

Vielleicht kennen Sie aus der Schule die Matrixmultiplikation mit einem Vektor für stochastische Prozesse: Ein Zustandsvektor \vec{v} wird in einem Zeitschritt $t_0 \to t_1$ mit Hilfe einer stochastichen Matrix S auf einen neuen Zustandsvektor abgebildet,

$$\vec{v}(t_1) = S\vec{v}(t_0).$$

Dies kann man wiederholen für einen weiteren Zeitschritt und fortsetzen.

$$\vec{v}(t_2) = S\vec{v}(t_1) = SS\vec{v}(t_0) = S^2\vec{v}(t_0).$$

Wir benötigen dann also die

Hintereinanderausführung=Verkettung linearer Abbildungen und Multiplikation von Matrizen. Diese Art der Verkettung linearer Abbildungen als Dynamik von Zuständen wird Ihnen spätestens in der Quantenmechanik wieder begegnen.

V.2 Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

In Komponenten entspricht die Verkettung zweier linearer Abbildungen $B(A(\bullet))$ der Matrixmultiplikation der beiden Matrizen $(A\cdot B)(\bullet)$, die wieder nach dem Schema Zeile * Spalte funktioniert.

$$\begin{pmatrix}
BA_{11} & BA_{12} \\
BA_{21} & BA_{22}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} \\
b_{21} & b_{22}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{pmatrix}$$

Zum Beispiel:

$$BA_{21} = b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21}$$

Zur Warnung! Die Matrixmultiplikation ist i.A. NICHT kommutativ. Zum Beispiel kommt es bei zwei Drehungen nacheinander um verschiedene Achsen auf die Reihenfolge an.

V.3 Determinantenproduktsatz

Die Determinante hat eine verblüffend einfache Regel bezüglich der Multiplikation von (quadratischen) Matrizen: Sie ist strukturerhaltend, d.h.

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

Determinatenproduktsatzes kann mit einer trickreichen
Ausnutzung der multilinearen alternierenden Eigenschaften der
Determinante durchgeführt werden
(https://de.wikiversity.org/wiki/
Determinante/Multiplikationssatz/Mit_
Spalten/Fakt/Beweis) und wird hier nicht versucht.

V.3 Determinantenproduktsatz

▶ Die inverse Matrix zu einer Matrix ist definiert über

$$A^{-1} \cdot A = \mathcal{E}_d \,,$$

wobei \mathbf{E}_d die Einheitsmatrix mit nur 1 auf der Digonalen und 0 sonst ist. \mathbf{E}_d ist das neutrale Element der Matrixmultiplikation.

▶ Der Determinantenmultiplikationssatz besagt dann:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

- ▶ Wenn eine Matrix eine verschwindende Determinante hat, kann sie nicht invertiert werden! Sie hat Spalten- bzw. Zeilenvektoren, die linear abhängig sind voneinander und somit kein D-dimensionales Volumen aufspannen.
- ▶ Die obige Gleichung kann dann als LGS für A^{-1} nicht eindeutig gelöst werden mit dem Gauss-Verfahren.
- ► Es gilt tatsächlich: Eine quadratische Matrix A besitzt eine eindeutige inverse Matrix $A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

 Die Matrixdarstellung einer Projektion aus der Formel (LA-M) als

$$P_{\vec{\hat{a}}:ml} = \vec{e}_m * P_{\hat{a}}(\vec{e}_l) = \hat{a}_l \cdot \hat{a}_m.$$

lackbox Insbesondere, wenn $ec{\hat{a}}=ec{e}_k$ gewählt wird, gilt:

$$P_{\vec{e}_k;ml} = \delta_{km}\delta_{kl} .$$

Nur ein Element der Matrix 1 an der Diagonalstelle zu k, alle anderen sind 0, z.B.

$$P_{\vec{e}_2} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \,.$$

 Die Matrixdarstellung der Streckung aus der Formel (LA-M) als

$$A_{s;ml} = \vec{e}_m * A_s(\vec{e}_l) = s \cdot \delta_{ml}.$$

▶ also ein s-faches der Einheitsmatrix,

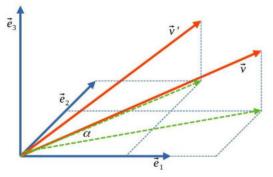
$$A_s = \left(\begin{array}{ccc} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{array}\right) .$$

▶ Wahl der 3—Achse in Richtung der Drehachse.

$$\vec{v}' := D_{\alpha \vec{e_3}} \cdot \vec{v}$$

$$v'_3 = v_3$$

$$(v'_1)^2 + (v'_2)^2 = (v_1)^2 + (v_2)^2$$



➤ Zu den Bedingungen in der Abbildung ziehen wir das Skalarprodukt heran:

$$v_1v_1' + v_2v_2' = ((v_1)^2 + (v_2)^2) \cdot \cos \alpha$$
.

und das Kreuzprodukt der beiden Projektionen,

$$v_1v_2' - v_2v_1' = ((v_1)^2 + (v_2)^2) \cdot \sin \alpha$$
.

Mit Gauss-Verfahren erhalten wir die Gleichungen für v_1', v_2' als Funktion der Koordinaten v_1, v_2 und des Winkels $\alpha.\mathsf{TAFEL012}$

$$v_1' = v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha; \quad v_2' = v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha.$$

▶ Die Matrix einer Drehung um die 3-Achse lautet

$$D_{\alpha\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0\\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

TAFEL 012

Gauß:

$$\mathcal{J}_{1}\mathcal{J}_{1}' + \mathcal{J}_{2}\mathcal{I}_{2}' = \mathcal{S}^{2}\cos \times \mathcal{J} \cdot \mathcal{J}_{2} \cdot \mathcal{J}_{1}$$

$$\mathcal{J}_{1}\mathcal{J}_{2}' - \mathcal{J}_{2}\mathcal{J}_{1}' = \mathcal{S}^{2}\sin \times \mathcal{J} \cdot \mathcal{J}_{1} \cdot \mathcal{J}_{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 8^2} = 8^2 \sqrt{2} \cos x + 8^2 \sqrt{4} \sin x$$

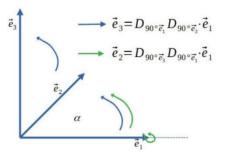
$$\Rightarrow$$

$$\mathcal{J}_2' = \mathcal{J}_2 \cos x + \mathcal{J}_2 \sin x$$

$$\mathcal{J}_1' = \mathcal{J}_1 \cos x - \mathcal{J}_2 \sin x$$

Am Beispiel der zweier Drehungen nacheinander (erst um die 3-Achse um 90° , dann um die 1-Achse um 90°) sieht man klar, dass es auf die Reihenfolge ankommt.

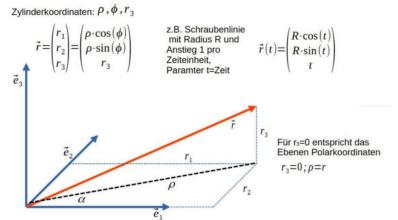
Inkompatibilität von Drehungen um verschiedene Achsen



In der Quantenmechanik wird es wichtig, dass die Eigenschaft der Drehung um zwei verschiedene Achsen zwei nicht zusammen vorliegende (inkompatible) Eigenschaften sind: Eine kann vorliegen und später die andere; aber nicht beide zusammen gleichzeitig.

V.5 Krummlinige Koordinaten: Zylinderkoordinaten

Kartesische Koordinaten x_j eines Vektors \vec{x} sind dann nicht gut geeignet, wenn Untermannigfaltigkeiten im Raum durch Symmetrien definiert sind, wie z.B. Kreisflächen, Kugeloberflächen oder Zylinderoberflächen oder Kurven auf diesen Flächen. Bei angepassten Koordinaten sind einige wie z.B. der Radius einer Kugel konstant. Hier schon mal Zylinderkoordinaten:



V.6 Matrixmutiplikation und LGS, Inverse Matrix

▶ Ein lineares Gleichungssystem zu Variablen x_1, x_2, x_3 mit einer Koeffizientenmatrix mit Spaltenreihung zu $(x_1 \ x_2 \ x_3 \ 1)$ -wie bereits dargestellt- kann auch als Matrixgleichung aufgefasst werden von der Form

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$
, (LGM)

wobei A die Koeffizienten der Spaltenreihung $(x_1 \ x_2 \ x_3)$ beinhaltet und \vec{b} die Spalte der Koeffizienten ohne Variablen auf der rechten Seite des LGS.

Fasst man das LGS so auf, sucht man nach einer **inversen** Matrix A^{-1} zu A, denn bei ihrer Existenz ist

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \,.$$

V.6 Matrixmutiplikation und LGS, Inverse Matrix

Mit Hilfe des Determinatenproduktsatzes kann man aus (LGM) eine explizite eindeutige Lösung durch Determinaten angeben. Sie heißt **Cramersche Regel** und ist anwendbar, wenn A invertierbar ist.

$$(\det A) \cdot x_j = \det \tilde{A}_j \implies x_j = \frac{\det \tilde{A}_j}{\det A}.$$

- Man erhält sie aus dem Produktsatz, indem man den Spaltenvektor \vec{x} so zu einer $d \times d$ Matrix erweitert, dass er an der j-ten Spalte steht und sonst nur 1 auf den Diagonalen und 0 sonst eingetragen sind. Auf der rechten Seite der Matrixgleichung steht dann eine Matrix \tilde{A}_j , die aus A entsteht, wenn man an der j-ten Spalte den Vektor \vec{b} einträgt. Man kann sich durch die Regel Zeile * Spalte davon überzeugen, dass das die gleichen Aussagen liefert wie (LGM).TAFEL013
 - ightharpoonup Für hohe Dimensionen d wächst der Berechnungsaufwand für die Determinanten rasch an.

TAFEL 013

a) Beispiel für Cramensche Regel - Herleitung
A. $\vec{x} = \vec{b}$ 4x4

i in X-Matrix erweitern 5 in "B- Matrix: A crweiten

t.b. für X3 :

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & b_1 & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{12} & b_2 & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & b_3 & \alpha_{34} \\ \alpha_{31} & \alpha_{12} & b_4 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

$$X_3$$

det t. det X3 = det F3

$$\Rightarrow X_3 = \frac{\det \widehat{A}_3}{\det A}$$

6) Beispiel für Cramersche Regel-Anwendung 2x2

$$3x_1-4x_2 = 12$$

$$-5x_1+x_2 = 8$$
 $A = \begin{pmatrix} 3-4 \\ -51 \end{pmatrix}$

$$X_1 = \frac{\text{det}\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}}{\text{det } 4} = \frac{44}{-17} = -\frac{44}{17}$$

$$X_2 = \frac{\det A}{\det A} = -\frac{84}{17}$$

Gauß-Verfahren 7:(+5) & +4 et wa gleich schnell.

V.7 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

• Oft will man wissen, ob für bestimmte Vektoren \vec{x}_{λ} die Matrix wie eine einfache Multiplikation wirkt,

$$A \cdot \vec{x}_{\lambda} = \lambda \vec{x}_{\lambda} .$$

 λ heißt dann **Eigenwert** der Matrix A zum **Eigenvektor** \vec{x}_{λ} .

- Über Bedingungen der Existenz, der Eindeutigkeit und Anwendungen werden Sie im weiteren Studium mehr erfahren.
- ➤ Zur Motivation: (1.) In der Quantenmechanik treten die Eigenschaften von Größen als Eigenwerte von linearen Abbildungen auf.
 - (2.) In der Mechanik von starren Körpern treten Eigenwerte des Trägheitstensors als Hauptträgheitsmomente auf.
 (3.) In der Mechanik von kontinuierlichen Medien treten Eigenwerte des Spannungstensors als Hauptspannungen auf.
 - (4.) Bei LGS dienen **Eigenvektoren** dazu, die gekoppelten Variablen in unabhängige neue Variablen zu entkoppeln.

V.7 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

- Bei starren Körpern ist der **Drehimpuls** \vec{L} eine lineare Abbildung des momentanen **Drehvektors** $\vec{\omega}$, (analog zu Impuls = Masse · Geschwindigkeit)
- $\vec{L} = T \cdot \vec{\omega}$ (T Trägheitstensor analog zu träger Masse).
- $\overrightarrow{\omega}$ zeigt in Drehachsenrichtung, $\|\overrightarrow{\omega}\|$ ist die Winkelgeschwindigkeit. \overrightarrow{L} ändert sich nicht, wenn keine Drehmomente wirken. Wenn $\overrightarrow{\omega}$ ein Eigenvektor von \overrightarrow{L} ist, ändert er sich auch nicht. Andernfalls "eiert" die Drehachse.

Bei Rotation um eine Achse, die Reuie Houptachse ist. $\overrightarrow{L} \neq \text{Viclfaches.}$



V.7 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

- In einer körperfesten ONB sind daher die Eigenwerte λ der Trägheitsmatrix T als **Hauptträgheitsmomente** und die zugehörigen Eigenvektoren \vec{x}_{λ} für die **Hauptachsenrichtungen** gesucht, die zu stabilen freien Rotationen führen.
- ▶ Das Auffinden der Eigenwerte geht nach folgendem Verfahren für eine $d \times d$ Matrix T:
- Aus $T\vec{x} = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow (T \lambda E_d)\vec{x} = \vec{0}$ und $\vec{x} \neq \vec{0}$ folgert man die Bestimmungsgleichung der Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(T - \lambda \mathbf{E}_d) = 0 .$$

- ▶ Das Polynom vom Grad d in λ hat d i.A. komplexe Lösungen (bei symmetrischen reelen Matrizen sind sie reell).
- ► Kennt man ein λ , findet man Eigenvektoren dazu durch Lösen des LGS $(T \lambda E_d)\vec{x}_{\lambda} = 0$.

V.7 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix TAFEL014

 \blacktriangleright Beispiel für einen flachen in der 1-2 Ebene liegenden Körper bei Koordinatenachsen, die nicht in Hauptachsenrichtung liegen

$$T = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1/3 & 0\\ -1/3 & 5/9 & 0\\ 0 & 0 & 23/9 \end{array}\right).$$

Charakteristisches Polynom $det(T - \lambda E_3) = 0$ liefert

$$((2 - \lambda)(5/9 - \lambda) - 1/9)(23/9 - \lambda) = 0$$

- ▶ Die drei Lösungen sind: $\lambda_3 = 23/9$, $\lambda_{1,2} = 23/18 \pm \sqrt{205}/18$.
- ▶ Dass $\vec{e}_3 = \vec{x}_{\lambda_3}$ Eigenvektor zu λ_3 ist, sieht man durch Einsetzen.

V.7 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix TAFEL014

ightharpoonup Für $ec{x}_{\lambda_1}$ setzt man das LGS an

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda_1 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/9 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 23/9 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1)_{\lambda_1} \\ (x_2)_{\lambda_1} \\ (x_3)_{\lambda_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und nutzt aus, dass (a) $(x_3)_{\lambda_1}=0$ sein muss und es (b) eine redundante Gleichung gibt.

Man kann daher z.B. $(x_2)_{\lambda_1}=1$ frei $(\neq 0)$ wählen und $(x_1)_{\lambda_1}$ aus der 1. Gleichung bestimmen zu: $(x_1)_{\lambda_1}=(1/3)(2-\lambda_1)^{-1}=-(13+\sqrt{205})/6$.

- Für \vec{x}_{λ_2} ist das Verfahren analog, nur $\sqrt{205}$ muss durch $-\sqrt{205}$ ersetzt werden.
- ➤ Zur Übung: Die drei Eigenvektoren sind orthogonal zueinander und können zu einer ONB der Hauptachsen gemacht werden.
- ▶ Übrigens als Mitteilung: Bei symmetrischen Matrizen sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer orthognal zueinander.

TAFEL 014

$$\left(T - \lambda E_3\right) = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 5/g - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (23/9) \end{pmatrix}$$
Eigenwerte:

det
$$(T-\lambda E_3) = (23/9-\lambda) \cdot \left[(\frac{5}{9}-\lambda)(2-\lambda) - \frac{1}{9} \right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_3 = \frac{23}{9}$$
 enie Wullstelle (Faktor)

$$\left(\frac{5}{9}-\beta\right)\left(2-\lambda\right)-\frac{1}{9}=0 \iff$$

THE VEEN VALOUES ENDER W

$$\frac{10}{9} - \frac{1}{9} - \frac{5}{9} \beta - 2\beta + \lambda^2 = 0 \iff$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{23}{18} \pm \sqrt{\frac{(23)^2 - (18)^2}{18}} = \frac{23 \pm \sqrt{205}}{18}$$

$$(X_1)_{\lambda_1} \cdot (2-\lambda_1) - \frac{1}{3}(X_2)_{\lambda_1} = 0 \qquad (X_2)_{\lambda_1} = 1 \text{ setzen}$$

$$= > (X_1)_{\lambda_1} = \left(\frac{1}{3}\right) \left(2 - \lambda_1\right)^{-1} = -\left(13 + \sqrt{205}\right)/6.$$

VI. Analysis in einer Veränderlichen

VI.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen

VI.2 Differentiationsregeln und Funktionsklassen

VI.3 Potenzreihen und Taylorentwicklung

VI.4 Integral als Stammfunktion und Flächenberechner

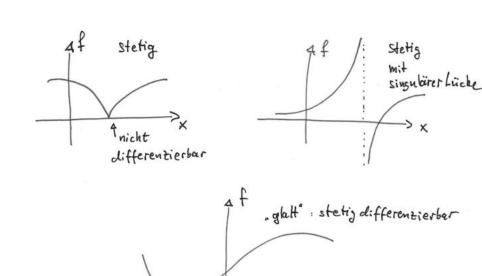
VI.5 Integralregeln und Tabellen für Funktionsklassen

VI.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

- ▶ Funktionen in einer Veränderlichen sind Abbildungen $f:D \to \mathbb{K} \; ; x \mapsto f(x)$ von einer Definitionsmenge D als Teilmenge eines Körpers in die Zielmenge eines Körpers. Meist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- ▶ Der Graph der Funktion, d.h. die Punktemenge (x, f(x)) oft als Ausschnitt graphisch dargestellt für den Eindruck der **lokalen** (topologischen=nachbarschaftlichen) **Verhältnisse** (Umgebungen von Punkten). Bei weitgefassten Ausschnitten Eindruck über die **globalen** topologischen **Verhältnisse**.
- ▶ In den folgenden Skizzen Unterscheidungskriterien erkennbar.



VI.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit



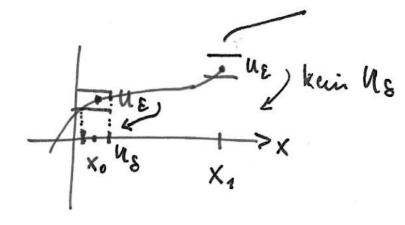
VI.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

- **▶** f ist im Punkt x **stetig** : $\Leftrightarrow \forall x_n \to x : f(x_n) \to f(x)$. f auf D stetig falls f überall punktweise stetig, d.h. f hinsichtlich Häufungspunkten strukturerhaltend.
- ▶ ϵ - δ Kriterium: f ist im Punkt x stetig $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \,\exists \delta > 0$ so dass $\forall x' \in D \text{ mit } |x' x| < \delta \text{ ist auch } |f(x') f(x)| < \epsilon.$ TAFEL015
- ▶ f ist im Punkt x differenzierbar $:\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =: f'(x) =: \frac{df(x)}{dx}$ existiert in \mathbb{K} . f ist auf D differenzierbar, wenn f überall punktweise differenzierbar ist. f' bzw. $\frac{df}{dx}$ heißt **Ableitungsfunktion** (Tangentensteigungsfunktion, Funktion der lokalen Änderungsraten) zu f.
- ▶ f in x differenzierbar, wenn **linear** approximierbar mit beliebiger Genauigkeit R: $f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\Delta x + R$. Knapp: $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) f(x) \approx \frac{df(x)}{dx}\Delta x$. TAFEL016

TAFEL 015

E-8 Kriterium

Skitte:



Beispiel rechnung (später cleverer) $f(x) = x^2$ stetig $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

Biede |f(x)-f(x0)| = (x2-x02)

bringe $|X-X_0|$ in spiel $|=|(X-X_0|\cdot|X+X_0|)$ und Abschätzungen $|=|(X-X_0|\cdot|X-X_0+2X_0|)$ $<|(X-X_0|\cdot|X-X_0|+|2X_0|)$

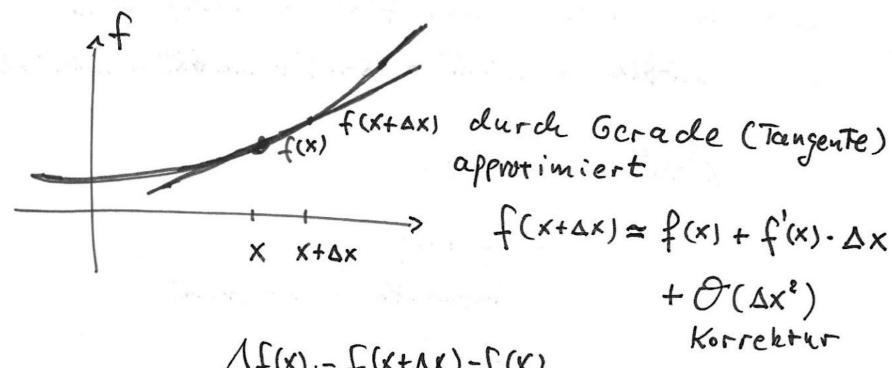
Wähle S < min 2 1, E 1+21x.1 }

 $Jann |f(x)-f(x_0)| < 8 \cdot (1+12x_01)$

 $<\frac{\varepsilon}{(1+(2\kappa_0))}\left(1+(2\kappa_0)\right)=\varepsilon$

Später sehen wir, dass man durch Regeln gante Funktionsklæssen als stitig (u. differentierbar) erkennen kann.

TAFEL 016



 $\nabla f(x) := f(x+\nabla x) - f(x)$

Grundidee

$$\Delta f(x) = \frac{df(x)}{dx} \cdot \Delta x + Korrektur(\Delta x)$$

So doess
$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x)$$

d.h. $\frac{Korrehtur(\Delta x)}{\Delta x} = 0$

Beispiele(1)
$$f(x) = mx + b \implies f(x) = m \quad \text{fes Fi Steigung}$$

$$\Delta f(x) = m \cdot \delta x \implies f'(x) = m \quad \text{fes Fi Steigung}$$

$$(2) f(x) = x^2$$

$$\Delta f(x) = X^2 + 2\Delta x \cdot X + (\Delta x)^2 - x^2$$

$$= 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \implies$$

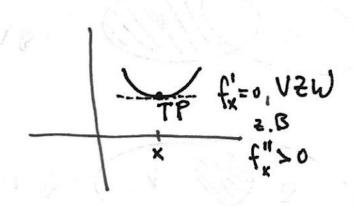
$$f'(x) = 2x$$

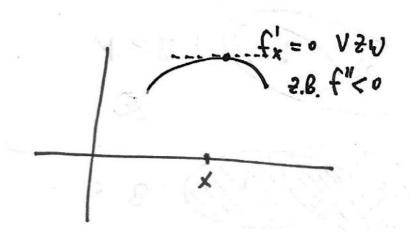
VI.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

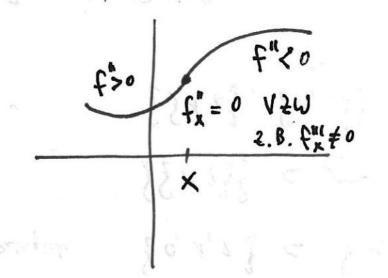
- **E**s gilt: Aus Differenzierbarkeit folgt Steigkeit. $C^0 := Menge der stetigen Funktionen$
- Ist auch f' stetig, ist $f \in C^1$. $C^1 :=$ Menge der **einmal** steig differenzierbaren Funktionen ("glatte" Funktionen)
- Ist auch $f' \in C^1$ so ist $f \in C^2$ usw.. $C^n := Menge der$ n-mal steitg differenzierbaren Funktionen. $C^{\infty} := Menge$ der beliebig oft steitg differenzierbaren Funktionen
- ▶ Die zweite Ableitung von f an der Stelle x, $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, gibt über die **Krümmung** des Graphen von f bei x Auskunft: f''(x) < 0 Rechtskrümmung , f''(x) > 0 Linkskrümmung.
- Kriterium für **lokale Extremstelle** bei x: f' macht dort einen Vorzeichenwechsel. Hinreichend ist eine Nullstelle von f' dort und $f''(x) \neq 0$. Nullstellen von f' ohne Vorzeichenwechsel gehören zu Sattelstellen.
- ▶ Kriterium für **lokale Wendestelle** bei x: f'' macht dort einen Vorzeichenwechsel. Hinreichend ist eine Nullstelle von f'' dort und $f'''(x) \neq 0$ TAFEL017

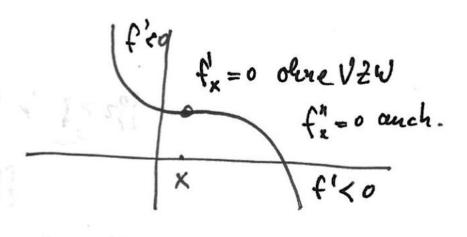
TAFEL 017

Extrema, Wendestellen, Sattelstellen









Total Control of the state of the state of

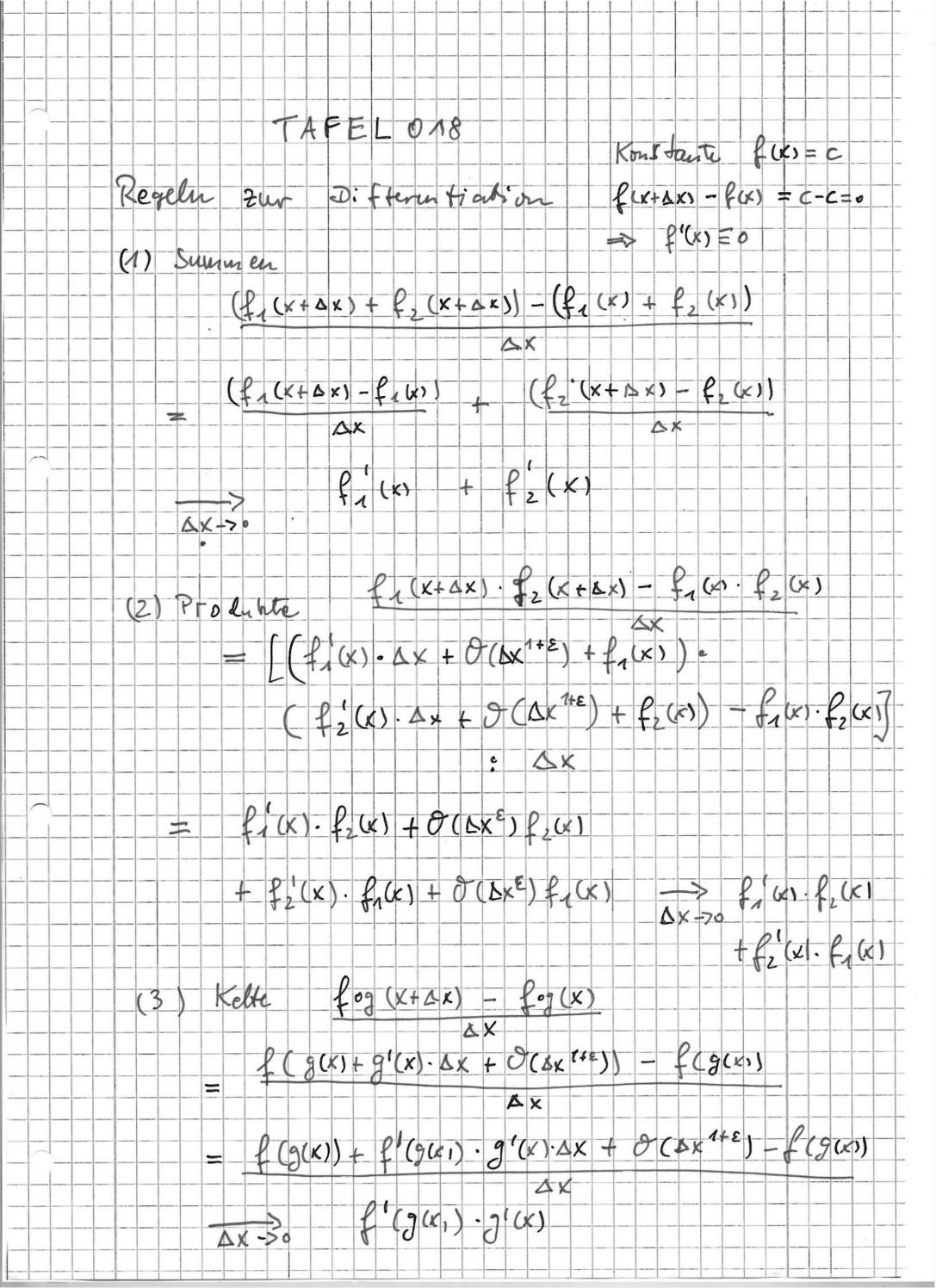
(11) D forces while

145/ Jane

VI.2 Differentiationsregeln und Funktionsklassen

Die Differentiationsregeln für Summen, Produkte und Verkettungen beweist man ausgehend von der Definition der Differentiation und den Regeln des Körpers $\mathbb K$ TAFEL018

- Summenregel $\frac{d(f_1(x)+f_2(x))}{dx} = \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(x))}{dx}$.
- ▶ Produktregel $\frac{d(f_1(x) \cdot f_2(x))}{dx} = \frac{df_1(x)}{dx} \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot \frac{df_2(x)}{dx}$.
- ► Kettentregel $\frac{d(f \circ g)(x)}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$.
- ▶ Konstanter Summand Regel Für eine konstante Funktion f(x) = c ist die Ableitung 0: $\frac{dc}{dx} = 0$.
- Aus den vorigen Regeln folgt über vollständige Induktion TAFEL019 die **Potenzregel** für natürliche Zahlen $n \ge 0$ und konstante Faktoren a: $\frac{d(ax^n)}{dx} = nax^{n-1}$.
- Aus der Funktionalgleichung für Exponentialfunktionen $b^{x+y} = b^x b^y$ und der Definition der Differentiation folgt die Ableitungsregel für Exponentialfunktionen $\frac{d(ab^x)}{dx} = ab^x \cdot (b^x)'(x=0).$



TAFEL019

Potentregel durch Induktion

Belieur tung $\frac{d(\alpha x^n)}{dx} = n \cdot \alpha \cdot x^{n-1} \forall n \ge 0$

Fir n=0 $\frac{d\alpha}{dx}=0$ (Schon zeteigt)

Schluss von n->n+1

d(axn+1)

d(xxn+1)

Produkt regel dx . x + ax . dx

 $\frac{dx}{dx} = \frac{x + 6x - x}{6x - 70} = 1$ $= \frac{1}{1} + \frac$

 $= (n+1) \alpha X^n$

Euler tahl e 22,71 ist diejenique tahl für die gilt $\frac{e^{\Delta x}}{\Delta x \rightarrow 0}$ $1 = (e^{x})^{1}(x=0)$ d.h. $\frac{e^{\Delta x}}{\Delta x} = 1 + 1 \cdot \Delta x + O(\Delta x^{1+\epsilon})$

VI.2 Differentiationsregeln und Funktionsklassen

- ▶ **Umkehrregel** Mit der Kettenregel beweist man für die Umkehrfunktion \hat{f} , die $\hat{f}(f(x)) = x$ erfüllt, dass $\frac{d\hat{f}(f(x))}{df(x)} = 1/\frac{df(x)}{dx}.$
- ▶ Ganzrationale Funktionen $\frac{d(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k)}{dx} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.
- ▶ natürliche Exponentialfunktion $\frac{d(ae^{kx})}{dx} = kae^{kx}$. (Basis e gerade so gewählt)
- ▶ natürliche Logarithmusfunktion $\frac{d \ln(x)}{dx} = 1/x$. (Beweis mit Umkehrregel)
- ▶ allgemeine Potenzfunktion $\frac{dx^r}{dx} = rx^{r-1}$. (Beweis mit $x^r = e^{r \ln x}$)
- ▶ Sin-Cos Funktionen $\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x)$, $\frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x)$. (Beweis mit Eulerformel)

VI.3 Potenzreihen und Taylorentwicklung

- ▶ Formale Potenzreihen $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ über einem kommutativen Körper \mathbb{K} bilden einen \mathbb{K} -Vektorraum (Übung) (siehe z.B. H. Cartan BI HTB 112).
 - Dabei sind alle Koeffizienten $a_n \in \mathbb{K}$ und X kann irgend ein Objekt sein, das man multiplizieren kann. Im Folgenden sei X reell oder komplex.
- **Konvergenzradius** Für komplexe X muss die Potenzreihe keinen wohldefinierten Wert in $\mathbb C$ haben, weil unendlich viele Koeffizienten a_n auftreten. Oft gilt es, einen Konvergenzradius $R \geq 0$ finden, so dass S(X) jeweils zu einem bestimmten Wert ∈ $\mathbb C$ konvergiert für jedes |X| < R.
- Zwei Konvergenzkriterien sollte man sich merken (Beweise siehe z.B. SERLO): (1) Wurzelkriterium: Für den größten Häufungspunkt A der Folge $|a_n|^{1/n}$ gilt: A < 1, dann ist R = 1/A. (2) Quotientenkriterium: Für den größten Häufungspunkt B der Folge $|a_{n+1}/a_n|$ gilt: B < 1, dann ist R = 1/B. $(R = \infty$ für A = 0 bzw. B = 0)

VI.3 Potenzreihen und Taylorentwicklung

- ▶ Die sog. **geometrische Reihe** sollte man sich auch merken $S_{\text{geo}}(X) = \sum_{n \geq 0} X^n = 1/(1-X)$ für |X| < 1. (Beweis mittels $(1-X)\sum_{n=0}^k X^n = 1-X^{k+1}$)
- ▶ Da man den Koeffizienten a_n darstellen kann über die n-te Ableitung des Summanden a_nX^n bei X=0: $\frac{d^n(a_nX^n)}{dX^n}(X=0)=n!a_n, \text{ schließen wir auf die}$ Taylorentwicklung für konvergente Potenzreihen:
- ▶ Hat eine Funktion f(X) eine konvergente Potenzreihendarstellung (sog. analytische Funktion), so ist diese identisch mit der Taylorreihe

$$f(X) = \sum_{n>0} a_n X^n \text{ mit } a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(X)}{dX^n} (X = 0).$$

Dabei ist $\frac{d^{n=0}f(X)}{dX^{n=0}}:=f(X)$ gesetzt und 0!=1 und $X^0=1$.

VI.3 Potenzreihen und Taylorentwicklung

► Kann man einige wenige (z.B. s) Ableitungen einer unbekannten Funktion bei X=0 bestimmen, ist die

unbekannten Funktion bei X=0 bestimmen, ist die **Taylorentwicklung vom Grad** s $f_s(X) = \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(X)}{dX^n} (X=0) X^n$ eine Approximation an

▶ Ein großer Vorteil ist: Man kann einen anderen Ausgangswert $X = X_0$ statt X = 0 nehmen:

f(X), deren Güte man manchmal auch abschätzen kann.

$$f(X) = \sum_{n \ge 0} a_n (X - X_0)^n \text{ mit } a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(X)}{dX^n} (X = X_0)$$
In nöber X an X_0 decta become Chance and gute

- ▶ Je näher X an X_0 , desto bessere Chance auf gute Approximation durch wenige Summanden.
- ▶ Eine Anwendung ist die Reihendarstellung der *e*-Funktion und der Eulerdarstellung durch Reihen, die mit sin und cos identifiziert werden können:

$$e^{x} = \sum_{n \ge 0} \frac{x^{n}}{n!}$$

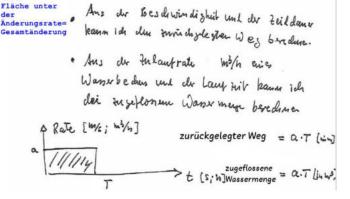
$$e^{ix} = \sum_{n \ge 0} \left\{ (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i(-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\} = \cos(x) + i \sin(x).$$

Idee Hauptsatz der Analysis: Die Gesamtänderung einer Funktion F über einem Intervall [a;b] ist die Summe aus den lokalen Änderungen ΔF_j über kurze Intervalle

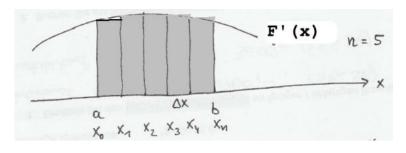
 $I_j := [x_j; x_j + \Delta x_j]: \quad F(b) - F(a) = \sum_j \Delta F_j$. Lokale Änderungen mittels **Änderungsraten** bei kurzen Intervallen:

 $\Delta F_j = rac{dF(x_j)}{dx_j} \cdot \Delta x_j$. Bei konstanten Änderungsraten einfach

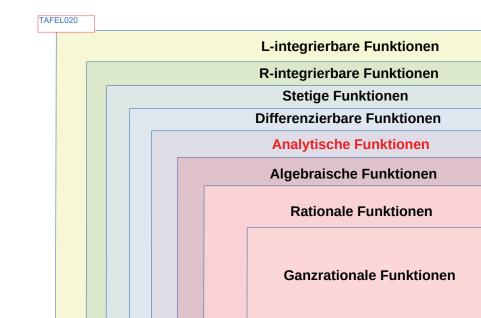
Idee:



$$F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x_j \to 0} \sum_{j} \frac{dF(x_j)}{dx_j} \cdot \Delta x_j =: \int_a^b \frac{dF(x)}{dx} dx$$



Das Integral $\int_a^b f(x) \ dx$ ist der orientierte Flächeninhalt zwischen Graph von f und x-Achse für [a;b]. Orientiert: Beiträge wo f<0 negativ , f>0 positiv. Sinnvoll für Gesamtänderungen aus Zuflüssen und Abflüssen. Der Limes ist eindeutig wenn f=F' stückweise stetig. Verallgemeinerungen möglich TAFEL020



▶ Die Formel der vorigen Folie drückt eine Beziehung zwischen einer Funktion f und einer zugehörigen **Stammfunktion** F, d.h. F'=f, als Beziehung zwischen lokalen Änderungsraten und globalen Flächen aus:

$$F(x) = F(a) + \int_{a}^{x} f(s)ds$$

Das ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

- Da sich Stammfunktionen oft auch durch "Aufleiten" gewinnen lassen, kann man mit ihrer Hilfe auch Flächen berechnen. Zum Beispiel ist die Fläche unter einem Sinusbogen $\int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(\pi) (-\cos(0)) = 2$.
- An der Formel oben sieht man auch, dass eine Stammfunktion erst durch die Vorgabe eines Wertes an einer Stelle eindeutig wird, denn F'=f lässt zu f viele um jeweils eine Konstante verschobene Stammfunktionen zu. TAFEL021

Integrale - Formely & Begriffe

Sfixida

orientierter Flächeniuhalt

twischen Graph von f und x-tchse af the cui Intervall [a; 6]

Gesamtänderung des Bestandes F

$$F(b) - F(a) = \int f(x) dx \quad mit$$

$$a \quad F'(x) = f(x)$$

$$fist + inderwas rate on F$$

S|f(x)|dx

absoluter Flächen whalt s.o. att

S | f(x) - g(x) | dx

absoluter Flächeninhalt 18 f tw. Gruphen von fund g un Intervall [a; b]

 $\frac{1}{f} = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x) dx$

Mittelwert von f um Intervall [a, b]

 $V_{Rot}^{(a_1b)} = TC \int_{a} [f(x)]^2 dx$

Volumen des Rotations körpers aus Graphen von f um X-Achse von a bis b

VI.5 Integralregeln und Tabellen für Funktionsklassen

Hier zunächst Regeln, die sich mit der Definition beweisen lassen:

Das Integral ist ein lineares Funktional, d.h. für Konstanten c,d und zwei integrierbare Funktionen f,g gilt:

$$\int_a^b \left(c \cdot f(x) + d \cdot g(x)\right) dx = c \int_a^b f(x) dx + d \int_a^b g(x) dx.$$

- Das Integral lässt sich zusammensetzen über sich anschließende Intervalle: $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.
- Rückwärts integrieren geht mit Vorzeichenwechsel einher: $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx.$

Zwei Regeln folgen als Umkehrung entsprechender
Differentiationsregeln: Produktregel ↔ partielle Integration und
Kettenregel ↔ Substitutionsregel

partielle Integration

$$\int_{a}^{b} \left(\frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) \right) dx = \left[f(x) \cdot g(x) \right]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} \left(f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx} \right) dx$$
Abkürzend steht $[h(x)]_{a}^{b}$ oder $h(x) \mid_{a}^{b}$ für $h(b) - h(a)$

▶ Substitutionsregel
$$\int_a^b (F'(g(x)) \cdot g'(x)) dx = [F(g)]_{g(a)}^{g(b)}$$
.

VI.5 Integralregeln und Tabellen für Funktionsklassen

- ▶ Die Substitutionsregel lässt sich auch als Transformationsformel auffassen, wenn g eine Umkehrfunktion auf [a;b] hat meist g^{-1} (besser \hat{g}) genannt:
- Transformationsformel

$$\int_{\hat{g}(a)}^{\hat{g}(b)} \left(f(g(t)) \cdot \frac{dg(t)}{dt} \right) dt = \int_a^b f(g) dg .$$

- ▶ Beispielanwendung part. Integration (ein Faktor hat eine bekannte Stammfunktion): $\int_a^b x \cdot e^x dx$ gesucht. TAFEL022 $\int_a^b x \cdot e^x dx = [(x-1)e^x]_a^b$.
- ▶ Beispielanwendung Substitutionsregel (ein Faktor kann als innere Ableitung dienen): $\int_a^b e^{\cos x} \cdot \sin x \ dx$ gesucht. TAFEL022 $\int_a^b e^{\cos x} \cdot \sin x \ dx = [-e^{\cos x}]_a^b.$

TAFEL 022

partielle Julegration (1)
$$x \cdot e^{x}$$
 $g \cdot f^{1}$

Stammfth. $[gf] - [gf] = [$

VI.5 Integralregeln und Tabellen für Funktionsklassen

Für viele verkettete oder multiplizierte Funktionen f(x) findet man leider keinen expliziten Term für die Stammfunktion F(x). Zum Beispiel zu $f(x) = e^{-x^2}$. In Integraltabellen (bzw. bei Algebra- u. online-Rechnern) stehen die Bekannten.

Potenzfunktionen

zu $f(x) = a \cdot x^r$ Stammfkt. $F(x) = \frac{a}{r+1}x^{r+1} + C$

- zu $f(x) = ax^{-1} = a/x$ Stammfkt. $F(x) = a \ln |x| + C$
- **Exponential function u. Logarithmus function** zu $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x + b}$ Stammfkt. $F(x) = \frac{a}{b} e^{k \cdot x + b} + C$

zu $f(x) = a \cdot \ln(k \cdot x + b)$ Stammfkt.

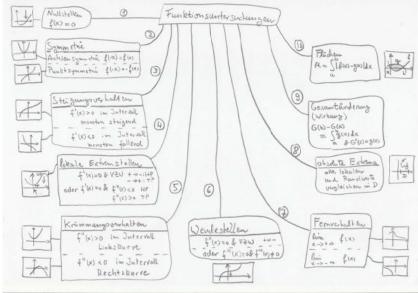
 $F(x) = a(x + \frac{b}{k})\ln(k \cdot x + b) - ax + C$

▶ Potenzfunktion zur Potenz r = -1

- ► Trigonometrische Funktionen zu $f(t) = A \cdot \sin(\omega t)$ Stammfkt. $F(t) = -\frac{A}{C}\cos(\omega t) + C$
- zu $f(t) = A \cdot \cos(\omega t)$ Stammfkt. $F(t) = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t) + C$
- ► Weitere bei https://de.wikipedia.org/wiki/ Tabelle_von_Ableitungs-_und_Stammfunktionen

VI.5 Integralregeln und Tabellen für Funktionsklassen

Mit Differential- und Integralrechnung lokale (1), (3)-(6) und globale (2), (7)-(10) Funktionsuntersuchungen



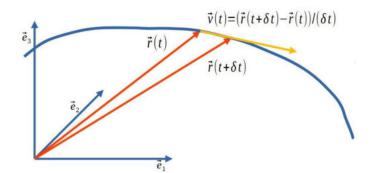
VII. Kurven in Euklidischen Räumen, angepasste Koordinatensysteme

VII.1 Geschwindigkeits- u. Tangentialvektor
VII.2 Kurvenintegrale: Bogenlänge und Arbeit
VII.3 Ebene und sphärische Polarkoordinaten

VII.1 Geschwindigkeits- u. Tangentialvektor

- ▶ Bahnen von z.B. Massenpunkten sind Punkte als **Funktion der Zeit** $t \in \mathbb{R}$ in einem Euklidischen Raum. Mit der Festlegung eines Ursprungs O lässt sich jeder Punkt X durch seinen Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$ darstellen.
- Stetig differenzierbare Abbildungen von einem reellen Intervall in einen Vektorraum heißen Parameterdarstellungen von Kurven: $t \in [t_0; \infty [\mapsto \vec{r}(t) \in V.$

Momentaner Geschwindigkeitsvektor für $\delta t \rightarrow 0$



VII.1 Geschwindigkeits- u. Tangentialvektor

▶ Der **Geschwindigkeitsvektor** in einer zeitunabhängigen Basis $\{\vec{e}_k\}_{k=1,...,d}$ ist dann:

$$\vec{v}(t) := \frac{d\vec{r}(t)}{dt} := \dot{\vec{r}}(t) = \sum_{k=1}^{d} \dot{r}_k(t)\vec{e}_k.$$

Man benötigt komponentenweise nur Analysis in einer Veränderlichen.

▶ Der Einheitsvektor zur momentanen Geschwindigkeit gibt die Richtung der momentanen Bewegung an und heißt **Tangentialvektor** zu $\vec{r}(t)$,

$$\vec{T}(t) := \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|}; \|\vec{T}(t)\| \equiv 1.$$

Für mindestens zweimal stetig differenzierbare Kurven $\vec{r}(t)$ ist $\vec{a}(t) := \ddot{\vec{r}}(t)$ der **Beschleunigungsvektor**, der zentral in der Newtonschen Mechanik ist.

VII.1 Geschwindigkeits- u. Tangentialvektor TAFEL023

ightharpoonup Beispiel 1: Geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v}

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v} \; ; \; \vec{v}(t) \equiv \vec{v} \; ; \; \vec{T} \equiv \hat{\vec{v}} \; ; \; \vec{a} \equiv \vec{0}.$$

▶ Beispiel 2: Geradlinige Bewegung mit variabler Geschwindigkeit $\dot{f}(t)\hat{\vec{v}}$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + f(t)\hat{\vec{v}} \; ; \; \vec{v}(t) = \dot{f}(t)\hat{\vec{v}} \; ; \; \vec{T} \equiv \hat{\vec{v}} \; ; \; \vec{a} = \ddot{f}(t)\hat{\vec{v}}.$$

▶ Beispiel 3: Ebene Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω ($\alpha(t) = \omega t \Rightarrow \dot{\alpha}(t) \equiv \omega$)

$$\vec{r}(t) = R\left(\cos(\omega t)\vec{e}_1 + \sin(\omega t)\vec{e}_2\right) ,$$

$$\vec{v}(t) = R\omega\left((-\sin(\omega t)\vec{e}_1 + \cos(\omega t)\vec{e}_2\right) ; ||\vec{v}(t)|| \equiv R\omega ,$$

$$\vec{T}(t) = -\sin(\omega t)\vec{e}_1 + \cos(\omega t)\vec{e}_2 ,$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}(t).$$

TAFEL 023

Beispiel 1 Geradlining gleich form ig $\chi(t)$ (ib) ich Geradlin parametrisierung $\chi(t)$ $\vec{r}(t) = \vec{r}(t) + t\vec{v}$ $\vec{r}(t) = \vec{r}(t) + t\vec{v}$

Beispiel 2 Gerædlining in Richtung F (NFII=1)
aber belubiger teitabhängisheib f(4)

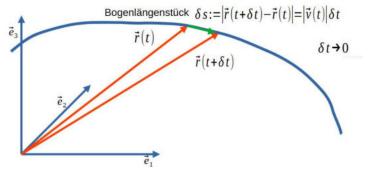
 $\vec{r}(t) = \sum_{k} \vec{r}_{ok} + f(t) \vec{s}_{k} \quad \int \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}(t) = \sum_{k} f(t) \vec{s}_{k} = f(t) \vec{s}$ $\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \sum_{k} f(t) \vec{s}_{k} = f(t) \vec{s}$

 $\vec{\tau}(t) = R\omega_s(\omega t) \vec{e}_1 + Rsin(\omega t) \vec{e}_2$ $\vec{v}_w = -Rsin(\omega t) \cdot \omega \vec{e}_1 + R\omega_s(\omega t) \cdot \omega \vec{e}_2$ $= R\omega \left(-sin(\omega t) \vec{e}_1 + \omega_s(\omega t) \vec{e}_1 \right)$

 $\hat{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = R \cdot \omega \cdot (\omega(-\cos(\omega t))\vec{e}_{1} - \omega(\omega t)\vec{e}_{2})$ $= -R\omega^{2}\vec{r}(t).$

VII.2 Kurvenintegrale: Bogenlänge und Arbeit

▶ Die **Bogenlänge** $s(t_0;t_1)$ eines Kurvenstücks vom Anfang t_0 bis zu einer Zeit t_1 definiert man sinnvoll als bestimmtes Integral über geradlinige Bogenlängenstückschen für immer kleinere Zeitintervalle δt .



$$s(t_0; t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{v}(t)\| dt.$$

Für die 3 Beispiele TAFEL024

VII.2 Kurvenintegrale: Bogenlänge und Arbeit

- \blacktriangleright Die Bogenlänge $s(t_0;t_1)$ hängt nicht von der konkreten Parameterdarstellung ab. Wenn $\tilde{t}(t)$ eine invertierbare glatte Funktion als Umparametrisierung ist, kommt die gleiche Bogenlänge heraus. Beweis mit Substitutionsregel zur Übung.
- Ebenfalls unabhängig von der Parameterdarstellung (Übung) ist das Integral über die momentane Leistung $P(t) := \langle F(\vec{r}(t)), \vec{v}(t) \rangle \text{, die ein Kraftfeld } \vec{F}(\vec{r}) \text{ an einem bewegten Massenpunkt leistet. (Kraft mal Geschwindigkeit in Projektionsrichtung) TAFEL025. Dieses Kurvenintegral heißt Arbeit <math>W(t_0; t_1)$. Es hängt i.A. vom genauen Wegverlauf im Kraftfeld ab.

$$W(t_0; t_1) := \int_{t_1}^{t_1} \langle F(\vec{r}(t)), \vec{v}(t) \rangle dt =: \int_{\mathcal{C}} \langle \vec{F}(\vec{r}), d\vec{r} \rangle . (\text{KInt})$$

▶ Ein Kurvenintegral eines Feldes $\vec{F}(\vec{r})$ längs einer Kurve \mathcal{C} ist i.A. wie in (KInt) definiert als gewöhnliches Integral für eine gewählte Parameterdarstellung.

Seigel 1:
$$\|\vec{\mathcal{J}}(t_1)\| = \|\vec{\mathcal{J}}\| = : \vec{\mathcal{J}} \implies S(t_0; t_n) = \underbrace{(t_1 - t_0) \cdot \vec{\mathcal{J}}}_{t_1}$$

Beispiel 2:
$$||\hat{J}(t)|| = \hat{f}(t) \implies S(t_0; t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \hat{f}(t) dt$$

$$S(t_0; t_1) = \underbrace{f(t_0, t_1)}_{f(t_0, t_1)} = \underbrace{f(t_0, t_1)}_{f(t_0, t_1)}$$

Bug:el 3:
$$||\vec{y}(t)|| = R \omega \left(\frac{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}{= 1} \right)^{1/2} = R \omega$$

$$S(t_0; t_1) = R \cdot \omega \cdot (t_1 - t_0) = R(x(t_1) - x(t_0))$$
Withel different

T45025

Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}(t)); \vec{v}(t)$$

$$= ||\vec{F}|| (\vec{r}(t)) \cdot ||\vec{v}||(t)$$

$$= momentane$$
Leistung $P(t)$

VII.2 Kurvenintegrale: Bogenlänge und Arbeit

▶ Beispiel: Arbeit eines geladenen Teilchens 2 auf radialem Weg von einer anderen Ladung 1 im Ursprung:

$$\vec{F}(\vec{r}_2) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 ||\vec{r}_2||^2} \hat{\vec{r}}_2 \; ; \; \mathcal{C} : \vec{r}_2(t) = t\hat{\vec{r}}_2 \; , \; t \in [t_0; T] \; , \; t_0 > 0.$$

- $\vec{v}_2(t) \equiv \hat{\vec{r}}_2, \ \left\langle \vec{F}(\vec{r}_2)(t), \vec{v}_2(t) \right\rangle = \left(Q_1 Q_2 \right) / \left(4\pi \epsilon_0 t^2 \right).$
- $W(t_0;T) = \left(Q_1Q_2\right)/\left(4\pi\epsilon_0\right)\int_{t_0}^T t^{-2}dt$. Das Integral ergibt $t_0^{-1}-T^{-1}$. Drückt man t_0,T durch die enstprechenden Ortsvektoren aus, wie z.B. $T=\|\vec{r}_2(T)\|$, so ergibt sich

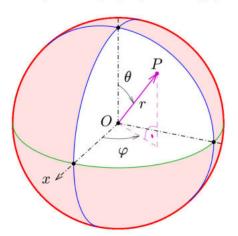
$$W(\vec{r}_2(t_0); \vec{r}_2(T)) = \frac{-Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r}_2(T)\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_2(t_0)\|} \right).$$

Tatsächlich hängt der Wert gar nicht vom genauen Kurvenverlauf ab, weil die Coulombkraft **konservativ** ist (ein **Gradientenfeld**) → später.

VII.3 Angepasste Koordinatensysteme

Das vorige Beispiel zeigte eine spärische Radialsymmetrie: Die Coulombkraft hängt nur vom radialen Abstand und nicht von Winkeln ab. In solchen Fällen verwendet man **spärische Polarkoordinaten**.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/ 6/69/Kugelkoord-def.svg/768px-Kugelkoord-def.svg.png



VII.3 Angepasste Koordinatensysteme

- Neue Koordinaten werden meistens so eingeführt, dass die kartesischen Koordinaten r_1, r_2, r_3 durch die neuen ausgedrückt werden. Eine Abbildung und geometrische Zusammenhänge helfen beim Aufstellen der Gleichungen.
- Für die spärischen Koordinaten $r \in [0; \infty[$, $\varphi \in [0; 2\pi[$ und $\theta \in [0, \pi[$ lesen wir aus der Zeichnung ab:

$$r_1 = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

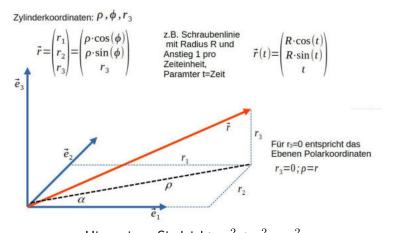
$$r_2 = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$

$$r_3 = r \cos(\theta)$$
.

▶ Unter Beachtung von $\sin^2(x) + \cos^2(x) \equiv 1$ zeigen Sie leicht, dass $\|\vec{r}\|^2 = r^2$.

VII.3 Angepasste Koordinatensysteme

Zylinderkoordinaten hatten wir schon früher benutzt. Wir führen sie hier noch einmal auf.



Hier zeigen Sie leicht: $r_1^2 + r_2^2 = \rho^2$. Liegt nur eine Ebene vor $(r_3 = 0)$ sind Zylinderkoordinaten ebene Polarkoordinaten mit $r = \rho$.

VIII. Differentialrechnung für Vektorfelder

VIII.1 Differential als lineare Approximante - Jacobi-Matrixdarstellung

VIII.2 Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

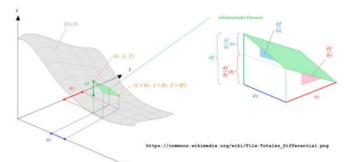
VIII.3 Lokale Koordinatenbasis mittels Jacobi-Matrix

VIII.4 Metrische Ableitungsoperatoren: Grad, Rot, Div

Ob Vektorfelder $\vec{F}(\vec{r})$ oder krummlinige Koordinatensysteme $\vec{r}(r,\varphi,\theta)$, es handelt sich um Abbildungen zwischen Vektorräumen, die zurückgeführt werden können auf Abbildungen vom Typ

$$\vec{f}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}).$$

Wir unterscheiden nun nach **partieller Differenzierbarkeit** und **totaler Differenzierbarkeit**. In der folgenden Abbildung ist der einfachste mehrdimensionale Fall dargestellt: f(x,y).



- ▶ Jede Variable x_i kann geändert werden zu $x_i + \Delta x_i$.
- Für jede Komponente $f_j(\vec{x})$ ändert sich der Wert zu $f_j(\vec{x} + \Delta \vec{x})$.
- Wenn sich die Änderung $\Delta \vec{f}_{\vec{x}}(\Delta \vec{x}) := \vec{f}(\vec{x} + \Delta \vec{x}) \vec{f}(\vec{x})$ für $\Delta \vec{x} \to \vec{0}$ als **lineare Abbildung** $d\vec{f}_{\vec{x}}$ beliebig genau approximieren lässt, so heißt diese lineare Abbildung das **totale Differential** von \vec{f} an der Stelle \vec{x} .

$$\Delta \vec{f}_{\vec{x}}(\Delta \vec{x}) = d\vec{f}_{\vec{x}}(\Delta \vec{x}) + \vec{\mathcal{O}}(\Delta \vec{x})$$

wobei $\lim_{\Delta \vec{x} \to \vec{0}} \vec{\mathcal{O}}(\Delta \vec{x}) = \vec{0}$ schneller als linear, d.h. z.B. für $\Delta \vec{x} = h \vec{x}_0$ wie h^2 .

In Komponenten wird eine lineare Abbildung durch eine Matrix $(d\vec{f_x})_{ij}$ dargestellt,

$$\Delta f_{i\vec{x}}(\Delta \vec{x}) \approx df_{i\vec{x}}(\Delta \vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} (d\vec{f}_{\vec{x}})_{ij} \cdot \Delta x_{j}$$

- ▶ Diese Matrix-Darstellung des totalen Differentials, $(d\vec{f}_{\vec{x}})_{ij}$, heißt auch **Jacobi-Matrix**.
- Als **partielle Ableitung** kann man die gewöhnlichen Ableitungen einer Komponente von f_i nach jeweils einer Variablen x_j bezeichnen, wobei jeweils die anderen Variablen wie Konstanten behandelt werden:

$$\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_j f_i(\vec{x})}{\Delta x_i},$$

- d.h. $\Delta_i f_i(\vec{x})$ beinhaltet nur Änderungen in der Variablen x_i .
- ▶ Andere Schreibweisen: $\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_i} =: \partial_{x_j} f_i(\vec{x}) =: \partial_j f_i(\vec{x}).$

- ▶ Nun gilt der wichtige Zusammenhang TAFEL026 zwischen partieller und totaler Differenzierbarkeit:
- Ist \vec{f} an der Stelle \vec{x} stetig partiell differenzierbar (alle partiellen Ableitungen existieren und sind dort stetig), so ist \vec{f} dort auch total differenzierbar und die Jacobi-Matrix des totalen Differentials ist die Matrix der partiellen Ableitungen

$$(d\vec{f}_{\vec{x}})_{ij} = \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_i}.$$

- ▶ Dann gilt also $df_{i\vec{x}}(\Delta\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i}(\vec{x})}{\partial x_{i}} \cdot \Delta x_{j}$.
- ▶ Da insbesondere für die Koordinaten Differentiale gilt $dx_{j\vec{x}}(\Delta\vec{x}) = \Delta x_j$ (TAFEL027), schreibt man suggestiv und knapp:

$$df_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j.$$

TAPELO26

In linearer Approximation kann man

Δx = Σ Δx ej zerlegen und Δf; (Δx)

ist dann ebenfalls terlegber als

 $\Delta f_i(\Delta \vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \Delta f_{ij}(\Delta x_j)$

 $\Delta f_{ij}(\Delta x_j) = f_i(\vec{x} + \Delta x_j \vec{e_j}) = \frac{\partial f_i(\vec{x}')}{\partial x_j} \Delta x_j + \mathcal{O}(\Delta x_j^{1+\epsilon})$ Andysis in 1 Variables
Lineare Approximation

 $=> (df_{x})_{ij} = \frac{\partial f_{c}(x)}{\partial x_{j}}$ $\Delta f_{ij}(\Delta x_{i}) \rightarrow df_{ij}(\Delta x_{i})$

Romposenten wise leineare Approximente (stetig bei Z) daher luidentig)

Tafel 027

Fasse Xj(x) als Flet R">R cenf, dann ish

 $dx_{jx}(\Delta x) = \sum_{k=1}^{b} \frac{\partial x_{j}}{\partial x_{k}} \Delta x_{k} = \sum_{k=1}^{b} S_{jk} \Delta x_{k} = \Delta x_{j}$

Sogar für beliebigen Vektor Ü dXjx (Ü) = (Ü); da pp linear In dem Sinne mass der Veletor nicht u kurt" seeis.

Es kommt aux dus lineare Verhalben des Différentials an.

«Kürse von DX ist nur ui der Præxis Widsig,

da du Funktion f(X+DX) nur für kurse AX

i.d.R. church das lineare Differential

approximient werden kann.

Beispiel:

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2: (x, y, z)^T \mapsto \vec{f}(x, y, z) = (xyz^2, x^2 + y^2 + z^2)^T.$$

► Die Jacobi-Matrix ist dann

$$J_f(\vec{x}) := \left(\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j}\right)_{ij} = \left(\begin{array}{ccc} yz^2 & xz^2 & 2xyz\\ 2x & 2y & 2z \end{array}\right).$$

- Die lineare Approximation für Zuwächse $\Delta \vec{x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$ ist $\Delta \vec{f_x}(\Delta \vec{x}) \approx \left(yz^2\Delta x + xz^2\Delta y + 2xyz\Delta z, 2(x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z)\right)^T$.
- ▶ In der Kurzschreibweise mit Koordinaten Differentialen:

$$d\vec{f} = \left((yz^2)dx + (xz^2)dy + (2xyz)dz, 2(xdx + ydy + zdz) \right)^T.$$

- Partielle Ableitungen sind Ableitungen einer Funktion nach einer Veränderlichen, daher gelten die gleichen Ableitungsregeln (z.B. Summen-, Produkt-, Kettenregel).
- ► Für die Jacobi-Matrix ist die Kettenregel eine Matrixmultipkation. Sei

$$\vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l : \vec{x} \mapsto \vec{g}(\vec{x}) \mapsto \vec{f}(\vec{g}(\vec{x})):$$

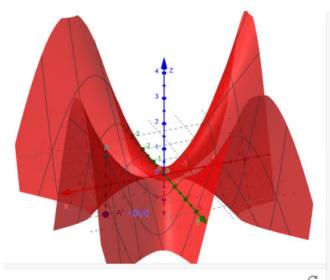
$$\partial f_i(\vec{g}(\vec{x})) \qquad \sum_{i=1}^n \partial f_i(\vec{g}(\vec{x})) \partial g_k(\vec{x})$$

$$\frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g_k(\vec{x})} \frac{\partial g_k(\vec{x})}{\partial x_j}.$$

► Höhere partielle Ableitungen werden gebildet unter Angabe, nach welcher Variablen jeweils abgeleitet wird, z.B.

$$\frac{\partial^p f_i(\vec{x})}{(\partial x_i)^{p_1}(\partial x_k)^{p_2}(\partial x_l)^{p_3}}$$

mit $p_1 + p_2 + p_3 = p$. Sind dabei die partiellen Ableitungen **alle stetig**, kann man die **Reihenfolgen vertauschen** (Schwarz'scher Vertauschungssatz).



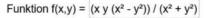
x	у	f(x,y)
-3	-3	0
-2	-2	0
-1	-1	0
0	0	?
1	1	0
2	2	0
3	3	0
***	•••	
3	2	2.31

mittels Geogebra-Plotter Autor:Andreas Lindner Thema:Graph, Oberfläche

Übungsaufgabe mit

Ubungsaufgabe mit Besonderheit bei (0,0)

Unstetigkeit der gemischten Krümmungen bei (0,0)



- Von besonderem Interesse ist die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}: \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$.
- ightharpoonup Diese sogenannte **Hesse-Matrix** für C^2 -Funktionen

$$H_{ij}(\vec{x}) := \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}$$

ist symmetrisch (Vertauschungssatz) und lässt sich dann auch diagonalisieren.

- ► Ihre **Eigenwerte** geben Auskunft über lokale **Krümmungen** in den zugehörigen Hauptrichtungen.
- Sind alle Eigenwerte der Hesse-Matrix **positiv** bzw. **negativ** bzw. **von verschiedenen Vorzeichen** an einer Stelle mit verschwindendem Differential ($d_{\vec{x}}f=0$, d.h. alle Tangenten in alle Richtungen verschwinden dort.), so hat f dort ein lokales **Minimum** bzw. **Maximum** bzw. einen **Sattelpunkt**.
- ▶ Bei (teilweise) verschwindenden Haupt-Krümmungen muss man die Umgebung mit untersuchen. TAFEL028

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}x^2 - x = \frac{1}{2}(x - 2)x \qquad NST \quad \text{bei} \quad x = 2 x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}y \qquad \qquad NST \quad \text{bei} \quad y = 0$$

2 Steller mit
$$df_{\vec{x}} = 0$$
 1. $(x_{01}y_{0}) = (2,0)$
2. $(x_{01}y_{0}) = (0,0)$

He sse Matrix
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = x - 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

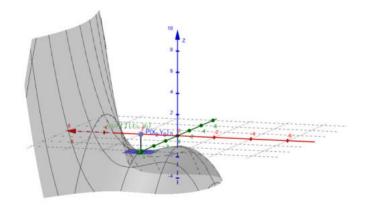
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}$$

$$|f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$
 2 negative Eisenwerte \Rightarrow lokales Maximum alat

für -f(xix) ist entsprechend bui (0,0) lui lokales Minimum

Siehe Geo-Gegra Plots WWW. Jeogebra. org/m/r/mx KNSE von Autor Andreas Lindner

 $f(x,y)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}y^2-1$ hat bei (2,0) einen Sattelpunkt:



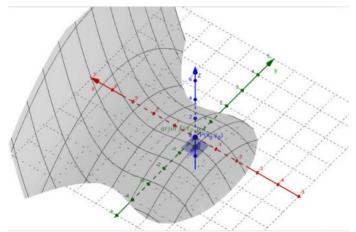
Funktion
$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x^3 / 6 - x^2 / 2 - y^2 / 4 - \\ & al/show/id/rVmxKNSE \end{bmatrix}$$

$$Hess f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$det Hess f(x_0,y_0) = -0.5 \text{ a df}_{(x_0,y_0)} (x_0,y_0) = 0$$

$$\Rightarrow f \text{ be sitzt in } (2,0) \text{ einen Sattelpunkt}$$

 $f(x,y)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}y^2-1$ hat bei (0,0) ein lokales Maximum:

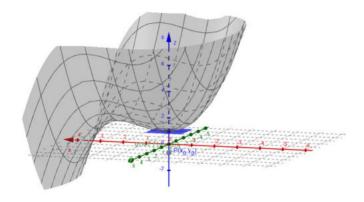


Funktion $f(x,y) = x^3/6 - x^2/2 - y^2/4$

ttps://www.geogebra.org/material/show/id/rVmxKNSE

$$\begin{aligned} & \text{Hess}\,f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} & \boxed{\qquad} \epsilon\text{-Umgebung} \\ & \text{det}\,\text{Hess}\,f(x_0,y_0) = 0.5 \text{ A}\,\text{df}_-(x_0^-0,y_0^-0) = 0 \end{aligned} \qquad \qquad \text{f besitzt in } (0,0) \text{ ein lokales Maximum} \end{aligned}$$

 $f(x,y)=\frac{-1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}y^2+1$ hat bei (0,0) ein lokales Minimum:

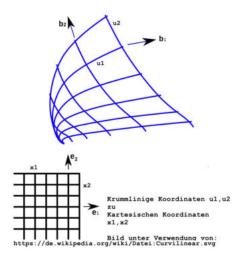


Funktion
$$f(x,y) = (-x^2)/6 + x^2/2 + y^2/$$
 https://www.geogebra.org/material/show/id/rVmxKNSE

Hess $f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ ε -Umgebung

det Hess $f(x_0,y_0) = 0.5 \text{ adf}_{-}(x_0,y_0) = 0$ f besitt in $(0,0)$ ein lokales Minimum

 C^1 -Abbildungen $\vec{r}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n: \vec{u} \mapsto \vec{r}(\vec{u})$, kann man als **Koordinatentransformationen** von möglicherweise krummlinigen Koordinaten $\vec{u}=(u_1,\ldots,u_n)^T$ auf die als geradlinig interpretierten Koordinaten $\vec{r}=(x_1,\ldots,x_n)^T$ betrachteten.



- Dazu muss allerdings die Abbildung $\vec{r}(\vec{u})$ mindestens lokal invertierbar sein, um in einer Umgebung eines Punktes Ein-Eindeutigkeit zu garantieren.
- ▶ Am besten ist sie überall (bis auf Ausnahmen) invertierbar.
- ▶ Die Kurven $t \mapsto \vec{r}(u_1, \dots, u_m = t, \dots, u_n)$ sind die Koordinatenlinien zur Koordinate u_m , wenn alle anderen Koordinaten festgehalten werden.
- Die zugehörigen lokalen (unnormierten) Tangentialvektoren

$$\vec{b}_m(\vec{u}) := \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_m} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_i(\vec{u})}{\partial u_m} \vec{e}_i$$

bilden alle zusammen eine **lokale Basis** $B(\vec{u})$ des \mathbb{R}^m .

Denn: Die lokale Invertierbarkeit bedeutet die Invertierbarkeit der quadratischen Jacobi-Matrix. Deren Invertierbarkeit besagt, dass ihre Jacobi-Determinate ≠ 0 ist. Deshalb sind die Tangentialvektoren als Spaltenvektoren dieser Jacobi-Matrix linear unabhängig!

- Im Falle von Koordinatentransformationen mit quadratischer Jacobi-Matrix schreibt man diese auch oft als $J:=\frac{\partial(r_1,...,r_n)}{\partial(u_1,...,u_n)}$ und ihre Inverse suggestiv als $J^{-1}=\frac{\partial(u_1,...,u_n)}{\partial(r_1,...,r_n)}$.
- Das findet vor allem Anwendung in der Thermodynamik, wenn von Variablen wie Energie und Volumen (E,V) auf andere Variablen wie Temperatur und Druck (T,p) gewechselt wird. Dort hat man übrigens kein Skalarprodukt und damit keine Längen und Winkel vorliegen.
 - ▶ Bei Vorliegen einer Metrik (d.h. eines Skalarproduktes) kann man auch lokale normierte Tangentialvektoren betrachten. Man kann dann auch die Krümmung von Koordinatenlinien über den Betrag der Ableitung des normierten Tangentialvektors nach der Bogenlänge definieren.
- Bei einigen häufig verwendeten Koordinatentransformationen im \mathbb{R}^3 mit Standardmetrik bilden die lokalen Basisvektoren eine lokale orthogonale Basis, die durch Normierung als lokale ONB benutzt werden kann (TAFEL029 und Übung).

Tafel 029 a

Zylinder kvordinattin bzw. ebene Polarkoordúaten

$$\vec{T}(\vec{q}, z) = \begin{pmatrix} s \cos \varphi \\ s \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$$
Rathesisch

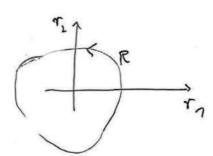
DE [03 54 [T ∈ 10; ∞[2 E R

Koordinaten livien for Koordinate 3 Strahl nach anßen

Koordinaterlinie zu q

z=h, 9=R

Spitte

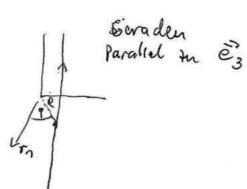


Krisc mit Radius R

Koordinaha linie In z

S=R, P= 90

Szitte



Tafel 029 b

$$\frac{\partial r_1}{\partial r} = \cos \varphi \qquad \frac{\partial r_2}{\partial r} = \sin \varphi \qquad \frac{\partial r_3}{\partial r} \qquad 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = 3 \sin \varphi \qquad \frac{\partial r_2}{\partial \varphi} = 3 \cos \varphi \qquad \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} \qquad 0$$

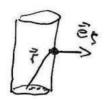
$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial r_2}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} = 1$$

Spalten schtwar dr Jacobs Matix

$$\int_{-s \sin \varphi} \left(\begin{array}{ccc} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -s \sin \varphi & s \cos \varphi & 0 \end{array} \right)$$

Basis vehor
$$\vec{b}_{\mathbf{F}} := \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = : \vec{e}_{\mathbf{F}}$$

ish solven auf 1 hormient und teigt



radial nous außer un enir Ebene bei Z

Zeigt fangentiel an Kreisbewesung



$$\overrightarrow{e}_{\varphi} := \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\overrightarrow{b}_{\varphi}$$

$$\vec{c_2} = \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tigt in et Richtung.

Es gilt:
$$\vec{e_g} \perp \vec{e_q}$$

(Shalarprodukt!) $\vec{e_g} \perp \vec{e_t}$
 $\vec{e_q} \perp \vec{e_t}$

(eg, eg, et) bilden Rechts-ONB

Tapl 029c

Kngelkoordinaten bow sphärische Polarkoordinaten

$$T_1 = T \cos \varphi \sin \Theta$$
 $\Theta \in [-\Pi, \Pi]$
 $T_2 = T \sin \varphi \sin \Theta$ $\varphi \in [0, 2\pi]$
 $T_3 = T \cos \Theta$ $T \in [0, \infty]$

$$\vec{br} := \frac{3}{2\pi} \frac{\partial r_i}{\partial \tau} \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \varphi \end{pmatrix} = : \vec{e}_i + 1 - nomiert \\ \sin \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_{\varphi} = \frac{3}{5} \frac{\partial r_{i}}{\partial \varphi} \vec{e}_{i}^{T} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \varphi \\ r \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}, \vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{i} = \frac{3}{7} \frac{\partial r_{i}}{\partial \varphi} \vec{e}_{i}^{T} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}, \vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{i} = \frac{3}{7} \frac{\partial r_{i}}{\partial \varphi} \vec{e}_{i}^{T} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}, \vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

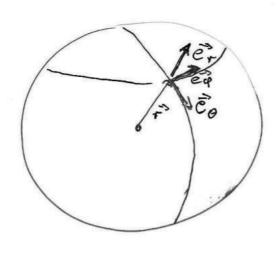
$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \cos \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \cos \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

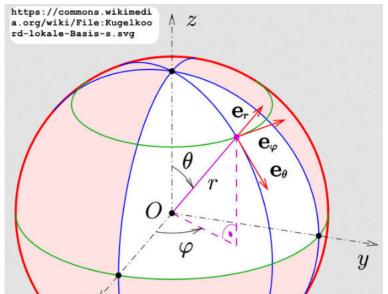
$$\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \vec{b}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \cos \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\dot{b}_{0} := \frac{3}{3} \frac{\partial r_{i}}{\partial 0} \dot{e}_{i}^{2} = \begin{cases} r_{cosp} \\ r_{ship} \\ -r_{shi} \end{cases}$$

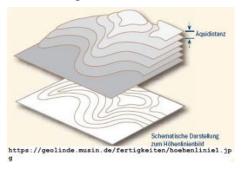
Er, e, e o bilden en Rechts-ONB (Shedarprodukte tijen das)



Hier für das Beispiel der Kugelkoordinaten die Koordinatenlinien und lokale ONB.



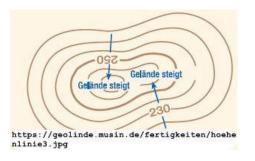
Graphen von **skalaren Feldern** $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}: \vec{r} \mapsto f(\vec{r})$ sehen im Falle n=2 aus wie Gebirgslandschaften über einer Ebene.



Man kann sie auch in der Ebene nur durch Höhenlinien darstellen. **Höhenlinien** sind Kurven $\vec{r}(t)$ mit festem Funktionswert, $f(\vec{r}(t)) \equiv f_0$, wobei f_0 die Höhe angibt. Entlang der Höhenlinien verschwindet daher das Differential von f:

$$df_{\vec{r}(t)} \equiv 0$$

Mit einem Skalarprodukt ist die Frage nach der **Richtung** des steilsten Anstieges (Abstieges) sinnvoll, da diese senkrecht zu den Höhenlinien verläuft.



Das zugehörige **Vektorfeld** $\operatorname{grad} f(\vec{r})$ wird als **Gradientenfeld** des Skalarfeldes $f(\vec{r})$ bezeichnet und ist dann definiert durch

$$\langle \operatorname{grad} f(\vec{r}), d\vec{r} \rangle := d_{\vec{r}} f,$$

denn es steht dann senkrecht auf den Höhenlinien (df = 0).

Für beliebige Koordinaten $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ gilt ja

$$d_{\vec{u}}f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{u})}{\partial u_j} du_j. (DF)$$

Dabei ist keine Metrik vorausgesetzt!

- Mit Metrik und kartesischen Koordinaten zu einer ONB E gilt $\vec{r} = \sum_{j=1}^n r_j \vec{e_j}$ und $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \sum_{j=1}^n a_j b_j$.
- Deshalb liefert (DF) im Falle kartesischer Koordinaten eine Identifizierung des Gradienten in kartesischen Koordinaten als

$$\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial r_j} \vec{e}_j.$$

▶ Verbreitete Schreibweise mit dem Symbol ∇ (Nabla-Operator) $\nabla f(\vec{r}) := \operatorname{grad} f(\vec{r})$, der kartesisch komponentenweise auf f als partielle Ableitung "operiert":

$$\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)_{\mathrm{E}}^T$$

Bei Transformation $\vec{u} \mapsto \vec{r}$ mit krummlinigen Koordinaten \vec{u} gilt (Übung)

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{u})}{\partial u_i} \vec{G}^j,$$

wobei \vec{G}^j der Gradient der Koordinatenfunktion $u_j(\vec{r})$ ist:

$$\vec{G}^j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial r_k} \vec{e}_k.$$

Diesen drückt man gerne wieder in der lokalen Basis aus.

$$\vec{e}_k = \sum_{m=1}^n \frac{\partial u_m}{\partial r_k} \vec{b}_m$$

Die dabei auftretenden partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_i}{\partial r_j}$ kann man auch durch Inversion der Jacobi-Matrix $\frac{\partial r_i}{\partial u_j}$ erhalten, so dass schließlich alles in den Koordinaten \vec{u} und der lokalen Basis ausgedrückt werden kann TAFEL030

Tafel 030

$$\Delta t = \frac{9a}{3} \frac{9n!}{3t} \frac{g_{s}}{g_{s}} = \frac{9g}{3t} \frac{g_{s}}{g_{s}} + \frac{9d}{3t} \frac{g_{s}}{g_{s}} + \frac{9f}{3t} \frac{g_{s}}{g_{s}}$$

wegen
$$\vec{G}^{\dagger} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_{j}}{\partial r_{k}} \vec{e}_{k}$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial u_{ij}} = \frac{\partial r_$$

$$\left(\frac{\partial u_{j}}{\partial r_{k}}\right) = J^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\frac{1}{9}\sin\varphi & \frac{1}{9}\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \delta(\rho,\phi,z)/\delta(r_{-1},r_{-2},r_{-3})$$

Damit
$$\ddot{G}^1 = \ddot{G}^g = \cos \varphi \, \vec{e}_1 + \sin \varphi \, \vec{e}_2$$

 $\ddot{G}^2 = \ddot{G}^\varphi = -\frac{1}{2} \sin \varphi \, \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \varphi \, \vec{e}_2$
 $\ddot{G}^3 = \ddot{G}^2 = \vec{e}_3 = \vec{e}_2$

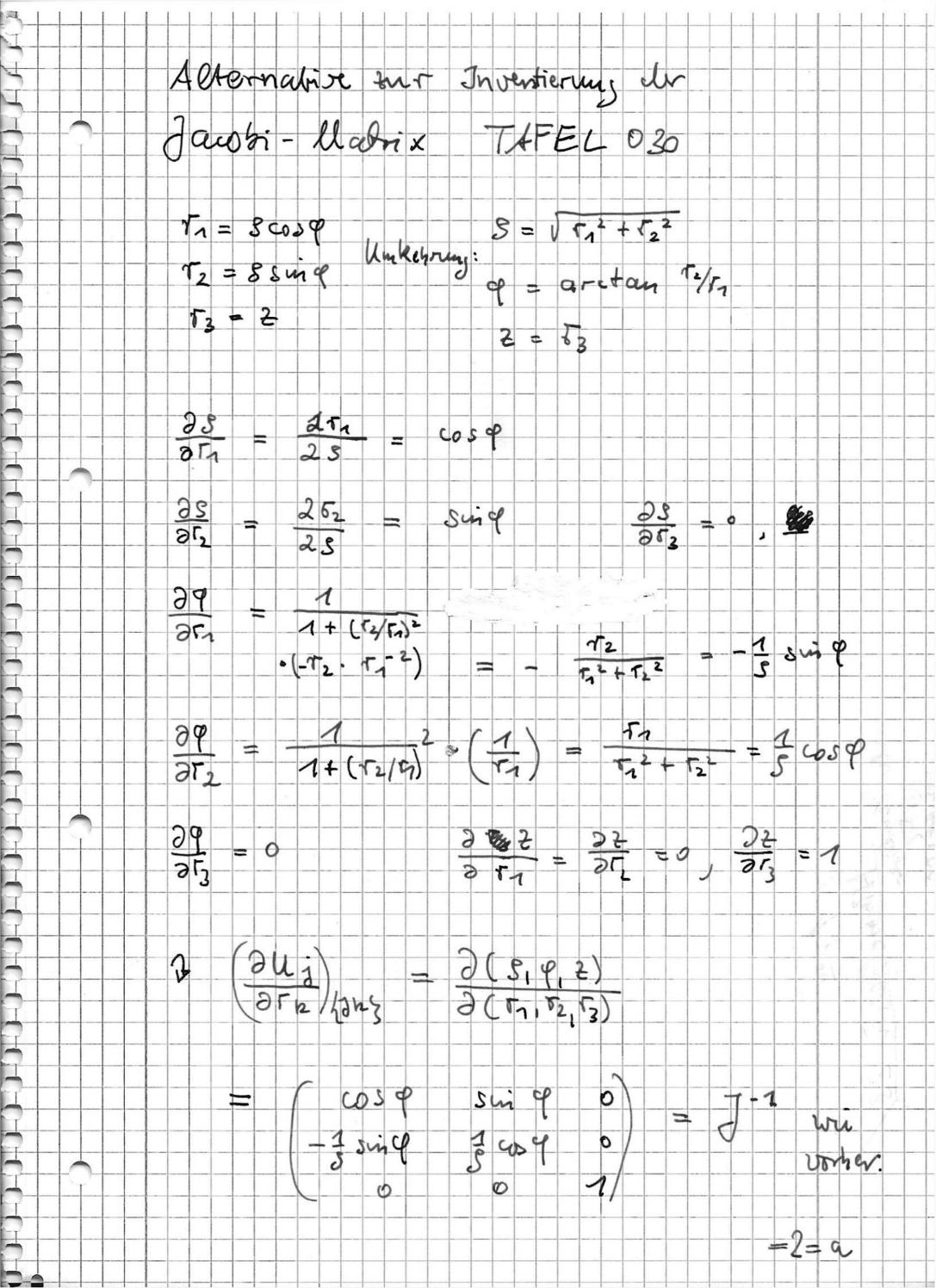
$$\vec{e}_1 = \omega_{S} \varphi \vec{b}_1 - \frac{1}{5} \sin \varphi \vec{b}_2$$

$$\vec{e}_2 = \sin \varphi \vec{b}_1 + \frac{1}{5} \omega_{\varphi} \vec{b}_2$$

$$\vec{G}^{2} = \vec{G}^{q} = -\frac{1}{g} \sin q \left(\cos q \vec{b}_{1} - \frac{1}{g} \sin q \vec{b}_{2} \right)$$

$$+ \frac{1}{g} \cos q \left(\cancel{\text{Ein}} q \vec{b}_{1} + \frac{1}{g} \cos q \vec{b}_{2} \right)$$

$$= \frac{1}{g^{2}} \vec{b}_{2}^{2} = \frac{1}{g} \vec{e}_{q}^{2}$$
Shuliplich:
$$\vec{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial s} \vec{e}_{s}^{2} + \frac{1}{g} \frac{\partial f}{\partial q} \vec{e}_{q}^{2} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_{z}^{2}.$$



Man kann die vorigen Schritte zusammenfassend schreiben als

$$\nabla f = \sum_{j,k,m=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial r_k} \frac{\partial u_m}{\partial r_k} \vec{b}_m.$$

Da man $\frac{\partial u_j}{\partial r_k}$ als $(\nabla u_j)_k$ auffassen kann, kann man für den Gradienten in krummlinigen Koordinaten auch die folgende Formel schreiben:

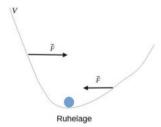
$$\nabla f = \sum_{i,m=1}^{n} \langle \nabla u_j, \nabla u_m \rangle \frac{\partial f}{\partial u_j} \vec{b}_m.$$

Die wichtigste Anwendung von Gradienten in der Physik ist bei Kräften mit Energieerhaltung, $E = E_{\text{tot}}(\vec{x}) + V(\vec{x}) = \text{genst}$ Dahei eind die Kraftfelder $\vec{E}(\vec{x})$

 $E=E_{\rm kin}(\vec{v})+V(\vec{r})\equiv{\rm const...}$ Dabei sind die Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r})$ die negativen Gradientenfelder der potentiellen Energie $V(\vec{r})$,

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}).$$

Die Interpretation ist: Konservative Kräfte zeigen entgegen der Richtung des stärksten Anstieges in der Landschaft der potenziellen Energie. In einem Minimum der potentiellen Energie ist eine Ruhelage der Bewegung.



 Eine wichtige Konsequenz und Charakterisierung von Gradientenfeldern folgt direkt aus der Definition:
 Kurvenintegrale über Gradientenfelder hängen nicht vom Wegverlauf ab zwischen zwei Punkten.

$$\int_{\mathcal{C}} \langle \nabla f(\vec{r}), d\vec{r} \rangle = f(\vec{b}) - f(\vec{a}),$$

wobei die Kurve $\mathcal C$ von $\vec a$ zu $\vec b$ verläuft. TAFEL031

▶ Daraus folgt insbesondere: Geschlossene Kurvenintegrale bei Gradientenfeldern ergeben 0.

$$\oint \langle \nabla f(\vec{r}), d\vec{r} \rangle = 0.$$

Ta fel 031

$$\int \langle \mathcal{F}(\vec{r}'), d\vec{r}' \rangle = \int_{t_0}^{t_1} d\vec{r}_{(0)} f(\vec{r}'(0)) dt$$
Parametrisicsum; $\vec{r}'(t)$ mit

 $\vec{r}'(t_0) = \vec{\alpha}$, $\vec{\delta}'(t_1) = \vec{\delta}'$

$$= \int_{t_{-1}}^{n} \frac{\partial f(\vec{r}(0))}{\partial r_i(t)} \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{bei nur}$$
euin Variastet

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial r_i(0)} \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0} \frac{\partial f(\vec{r}'(0))}{\partial t} \cdot dt \qquad \text{for a pig}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0} \frac{\partial f(\vec{r}$$

500

turisch a und B.

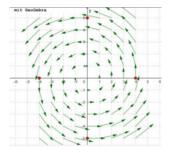
Für die **Rotation** eines Vektorfeldes gehen wir von einem Beispiel aus. Das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) := \vec{\omega} \times \vec{r}$$

mit $\vec{\omega}=\omega\vec{e}_3$ und ebenem $\vec{r}=r_1\vec{e}_1+r_2\vec{e}_2$ beschreibt ein **Wirbelfeld** in der Ebene mit Wirbelstärke ω (Übung),

$$\vec{A}(\vec{r}) = \omega(-r_2\vec{e}_1 + r_1\vec{e}_2) = \omega ||\vec{r}||\vec{e}_{\varphi},$$

wobei \vec{e}_{φ} der lokale normierte Einheitsvektor zur ebenen Winkelkoordinate φ ist.



Als Rotation eines Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{r})$ definieren wir bezogen auf kartesische Koordinaten $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ und $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}') := \nabla \times \vec{F}(\vec{r}') := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3(\vec{r})}{\partial r_2} - \frac{\partial F_2(\vec{r})}{\partial r_3} \\ \frac{\partial F_1(\vec{r})}{\partial r_3} - \frac{\partial F_3(\vec{r})}{\partial r_1} \\ \frac{\partial F_2(\vec{r})}{\partial r_3} - \frac{\partial F_1(\vec{r})}{\partial r_2} \end{pmatrix}.$$

lacktriangle Angewandt auf das zuvor definierte Wirbelfeld $ec{A}(ec{r})$ ergibt sich

$$\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \equiv 2\omega \vec{e}_3.$$

- ▶ Wir interpretieren: Die Rotation eines Vektorfeldes misst lokal die Wirbelstärke, die lokal als $\frac{1}{2}\vec{\omega} \times \vec{r}$ parametrisiert werden kann mit dem Wirbelzentrum bei $\vec{r} = \vec{0}$.
- ► Für C^1 Gradientenfelder gilt Wirbelfreiheit, $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\vec{r}) \equiv \vec{0}$. TAFEL032

Tafel 032

In Kartesische Koordinaten F. f(F)

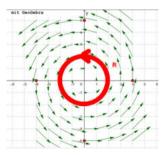
grad
$$f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial r_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial r_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial r_3} \vec{e}_3$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r_1} \\ \frac{\partial f}{\partial r_2} \\ \frac{\partial F}{\partial r_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

will f c2-Feld

Das Kurvenintegral auf einem Kreis im Abstand R um das Wirbelzentrum des Vektorfelds $\vec{A}(\vec{r})$ ist NICHT Null, sondern

$$\oint_{R} \left\langle \vec{A}(\vec{r}), d\vec{r} \right\rangle = \omega 2\pi R^{2}.$$



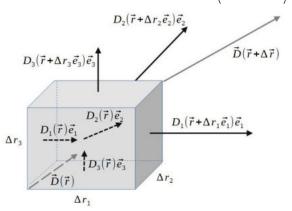
Das Skalarprodukt aus ${
m rot} \vec{A}$ und dem Flächen-Normalenvektor $F_R \vec{e_3}$ der vom Kreis eingeschlossenen Fläche $F_R = \pi R^2$ ist

$$\langle \operatorname{rot} \vec{A}, F_R \vec{e}_3 \rangle = 2\omega \pi R^2.$$

Diese Gleichheit ist kein Zufall (später)!!

VIII.4 Metrische Ableitungsoperatoren: Grad, Rot, Div

Lokale Quellstärke = **Divergenz** eines Vektorfeldes $\vec{D}(\vec{r})$ ist der **Fluss** des Feldes pro Volumeneinheit durch die geschlossene Oberfläche eines kleinen Volumens bei \vec{r} . Der Fluss ist das Skalarprodukt von Feld und Flächennormalenvektor, $\left\langle \vec{D}(\vec{r}), \Delta \vec{F} \right\rangle$.



Fluss eines Feldes \vec{D} durch eine geschlossene Oberfläche eines kleinen Volumens ΔV bei Position \vec{r} . Fließt mehr heraus als hinein, dann ist die Quellstärke positiv.

VIII.4 Metrische Ableitungsoperatoren: Grad, Rot, Div

In kartesischen Koordinaten mit einem kleinen kartesischen Quader ist der Fluss (TAFEL033):

$$\left(\frac{\partial D_1(\vec{r})}{\partial r_1} + \frac{\partial D_2(\vec{r})}{\partial r_2} + \frac{\partial D_3(\vec{r})}{\partial r_3}\right) \Delta V.$$

und somit die Divergenz (in n Dimensionen)

div
$$\vec{D}(\vec{r}) := \left\langle \nabla, \vec{D}(\vec{r}) \right\rangle := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial D_k(\vec{r})}{\partial r_k}.$$

- ► Speziell für $\vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{3}Q\vec{r}$ gilt $\text{div } \vec{D}(\vec{r}) = Q$.
- Für dieses radiale Vektorfeld ist der Fluss durch eine Kugel mit Radius R um den Ursprung gerade $\frac{1}{3}QR4\pi R^2$. Das Volumenintegral über die (konstante) Divergenz dieser Kugel ist $Q\frac{4\pi}{3}R^3$.
- Auch diese Gleichheit ist kein Zufall!!(später).

Tafel 033

lineare Approximation Di (F+ Arièi) =
$$Di(F) + \frac{\partial Di(F)}{\partial r_i} \Delta r_i$$

Alle Beiträse auf summieren für den sesansten Fluss lie fert

$$\frac{\partial D_{1}}{\partial \Gamma_{1}}(\vec{r}) \cdot \Delta \Gamma_{1} \Delta \Gamma_{2} \Delta \Gamma_{3} + \frac{\partial D_{2}}{\partial \Gamma_{2}}(\vec{r}) \Delta \Gamma_{3} \Delta \Gamma_{3} \Delta \Gamma_{3}$$

$$+ \frac{\partial D_{3}(\vec{r})}{\partial \Gamma_{3}} \Delta \Gamma_{3} \Delta \Gamma_{1} \Delta \Gamma_{2} = :$$

$$d: \vec{r} \vec{D}(\vec{r}) \cdot \Delta \vec{V} \implies dis \vec{D}(\vec{r})$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial D_{i}(\vec{r})}{\partial \Gamma_{i}} = \vec{V}, \vec{D}'$$

VIII.4 Metrische Ableitungsoperatoren: Grad, Rot, Div

- Die Divergenz eines Wirbelfeldes verschwindet, div $\left(\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r})\right) = 0.(\ddot{\mathsf{U}}\mathsf{bung})$
- ► Eine wichtige Anwendung in der Physik ist die Erhaltung einer Gesamtgröße Q, die sich räumlich verteilen kann, aber bei der insgesamt weder etwas entsteht noch vernichtet wird (Energie, Masse, Ladung).
- ▶ Die Gesamtgröße Q hat dann eine Dichte $\rho(\vec{r})$ deren Volumenintegral die Gesamtgröße Q ist und eine Strömungsdichte $\vec{j}(\vec{r})$.
- Deren negative Divergenz ist dann immer die zeitliche Änderung der Dichte. Das ist die Aussage der sog. Kontinuitätsgleichung:

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) + \partial_t \rho(\vec{r}, t) = 0.$$

Interpretation: Die zeitliche positive Änderung der Dichte in einem kleinen Volumenstück bewirkt eine positive Strömung der Größe durch dessen Oberfläche nach innen.

IX. Integration im Mehrdimensionalen

IX.1 Integration mit Quadermaßen

IX.2 Rückführung auf Integrale in einer Variablen - Fubini

IX.3 Integration mit Differentialformen

IX.1 Integration mit Quadermaßen - Vorbereitendes

- Eine andere Art auf eindimensionale Integrale zu schauen: Ein Intervall I:=[a,b] wird in N viele kleine nicht überlappende Intervalle der Breite Δx zerlegt. An den Positionen x_j der Intervalle wird die Breite Δx mit dem Funktionswert einer **orientierten Dichtefunktion** f belegt und aufsummiert zur Gesamtgröße $F(b)=F(a)+\sum_{k=1}^N f(x_j)\Delta x$.
- Im Limes $\Delta x \to 0$ werden immer mehr Stützstellen x_j benötigt $(N \to \infty)$, aber bei z.B. stetigen Funktionen existiert dann der Grenzwert als Integral

$$F(\partial I) := F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx := \lim_{\Delta x \to 0, N \to \infty} \sum_{k=1}^N f(x_j) \Delta x.$$

- ▶ $F(\partial I)$ verkörpert die Gesamtänderung der Größe F über den Rand ∂I . Die orientierte lokale Dichte dieser Größe ist f.
- In der früheren Interpretation war f eine orientierte Höhe und $F(\partial I)$ eine Fläche. Die obige Interpretation ist aber besser verallgemeinerbar auf mehrdimensionale Integrale.

IX.1 Integration mit Quadermaßen - Vorbereitendes

Ist F als Funktion der oberen Grenze x=b (am besten stetig) differenzierbar, so gilt die Hauptsatz-Eigenschaft

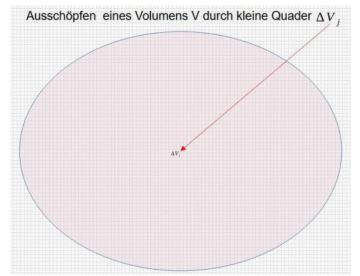
$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

lacktriangle Ausgedruckt durch das Differential von F lautet der Zusammenhang im Integral

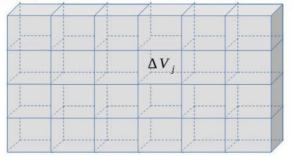
$$F(\partial I) = \int_{I} dF =: dF(I).$$

- ▶ In Worten: Die Summe (=das Integral) über das Differential dF über I, dF(I), ist identisch mit der Gesamtänderung von F am Rand ∂I , $F(\partial I)$.
- ▶ Wir werden später sehen, dass dich der Hauptsatz in dieser Schreibweise, $F(\partial I) = dF(I)$, als Spezialfall eines allgemeineren Sachverhaltes lesen lässt.

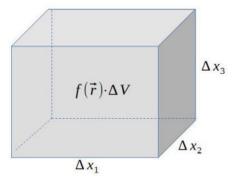
Nun betrachten wird statt Intervallen I in einer Dimension, Volumina V in d Dimensionen und setzen diese aus **kleinen** d-dimensionalen Quadern mit Volumen ΔV zusammen.



Die Quader werden nicht-überlappend, aber lückenlos zusammengesetzt.



Die Quader sollen so klein sein, dass sich Dichte-Funktionen $f(\vec{r})$ innerhalb des Quaders unwesentlich ändern, oder Änderungen durch lineare Approximationen beschrieben werden können.



Lokale Dichtefunktion $f(ec{r})$ mit zugehörigem Quadermaß ΔV

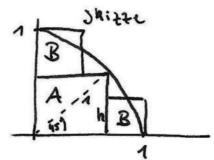
Als d-dimensionales Integral einer (orientierten) Dichtefunktion $f(\vec{r})$ über ein Volumen V mit der ausschöpfenden Zerlegung in N kleine Quader mit Volumen ΔV bezeichnen wir den Grenzwert (z.B. bei stetigem f)

$$Q(V) := \int_{V} f(\vec{r}) \ dV := \lim_{\Delta V \to 0, N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} f(\vec{r}_j) \Delta V. \ (I - RS)$$

- \blacktriangleright Die Gesamtgröße Q(V) (Ladung, Masse, Energie, ...) hat die lokale Dichte f.
- ▶ Die Berechnung des Integrals ist numerisch durch die Summe (I-RS) approximierbar. Die Quader k\u00f6nnen dabei auch statt starr von einer Gr\u00f6\u00dfe variabel gew\u00e4hlt werden, um V gut auszusch\u00f6pfen und sich einer schwachen Ver\u00e4nderlichkeit von f anzupassen. TAFEL034

TAFEL 034

geschickte anadoranpassunsen beim numerischen Integreren 2.8. Vierteleinheitskreisberechnung aus 2 Recht-

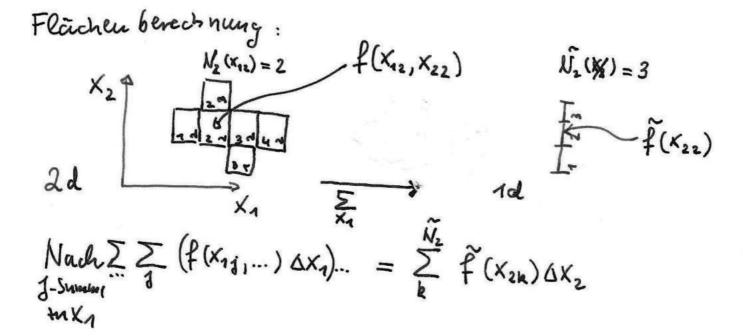


$$A + 28 \approx 0.73$$

 $\Rightarrow TC \approx 4.0.73 \approx 3.16$

Tafel 035

Beispiel: Fubini - diskrete Summen



- Die numerische Berechnung des Integrals geht auch noch auf eine andere Weise, die man als Monte-Carlo Integration bezeichnet.
- ▶ Dabei nutzt man aus, dass $N\Delta V = V$ das gesamte Volumen approximiert und $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N f(x_j)$ als Mittelwert \overline{f} von f über N Zufallszahlen interpretiert werden kann.

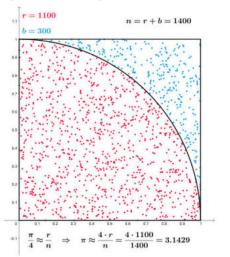
$$\int_{V} f(\vec{r}) \ dV = V\overline{f}. \ (I - MC)$$

Man benötigt das Volumen V und einen Mittelwert \overline{f} , den man durch zufälliges in V **gleichverteiltes Sampling** mit N Stellen x_j erhält. Das ist in hohen Dimensionen sehr viel effektiver als ausschöpfende Summation von (I-RS).

Auch V kann man durch Monte-Carlo bestimmen: Man wählt einen Einheitsquader, der V beinhaltet, und sampelt gleichverteilt N Punkte im Einheitsquader, von denen nur r in V liegen. Dann ist das Volumen

$$V = r/N$$
.

Als Beispiel dient die Berechnung einer Viertelkreisfläche eines Einheitskreises (aus Wikipedia): $\pi\approx 3,1429.$



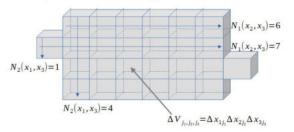
Von Kmhkmh - Eigenes Werk, CC BY 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php? curid=140013508

- ▶ Will man das Integral $\int_V f(\vec{r}) \ dV$ mit Mitteln der Analysis ohne Computer berechnen, bietet es sich an, den Hauptsatz zu nutzen.
- ▶ Dazu gibt es zwei Routen: (1) Man bleibt mehrdimensional und verallgemeinert den Hauptsatz auf Mehrdimensionalität. Das wird in Kapitel X vorgestellt. (2) Man versucht das Integral auf mehrere eindimensionale Integrale zu reduzieren und wendet dafür jeweils den bekannten Hauptsatz an. Das schauen wir uns nun in IX.2 an.

IX.2 Rückführung auf Integrale in einer Variablen - Fubini

- ▶ Um das Integral nach (I-RS) auf 1-dimensionale zurückzuführen, nummerieren wir die Quaderpositionen \vec{r}_j nach Positionen jeder Koordinate einzeln $x_{1j_1}, \dots x_{dj_d}$.
- Wir summieren getrennt nach den Koordinaten nacheinander. Dabei läuft jeder Index j_k von 1 bis zu einem N_k .
- ▶ Wenn das gesamte Volumen V kein einfacher d-Quader ist, hängt die Anzahl der kleinen Quader in x_k -Richtung zur Ausschöpfung des Volumens möglicherweise von der Position der anderen Koordinaten ab: $N_k(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_d)$.

Volumen V
Ausschöpfen eines Volumens V mit "gekrümmtem Rand" durch kleine Quader



IX.2 Rückführung auf Integrale in einer Variablen - Fubini

▶ Das Integral (I-RS) lautet nun ausgeschrieben noch als Summe

$$\sum_{i_1=1}^{N_d} \dots \sum_{i_1=1}^{N_1} f(x_{1j_1}, \dots, x_{dj_d}) \Delta x_1 \dots \Delta x_d.$$

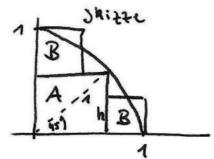
- Dabei ist zu beachten, dass insgesamt über die ursprünglichen N kleinen Quader zu summieren ist. Führt man nun z.B. die Summe über alle j_1 zur Koordinate x_1 aus, wobei die anderen Koordinaten beliebig aber fest sind, so hängt das Ergebnis von diesen anderen Koordinaten ab über die Dichte-Funktion f, aber auch über die möglicherweise variable Anzahl der Boxen $N_1(x_{2j_2}, \dots x_{dj_d})$.
- ▶ Das Ergebnis hat dann die Form

$$\sum_{i_1=1}^{\tilde{N}_d} \dots \sum_{i_2=1}^{\tilde{N}_2} \tilde{f}(x_{2j_2}, \dots, x_{dj_d}) \Delta x_2 \dots \Delta x_d,$$

wobei neue Anzahlen \tilde{N}_k nur noch von $(x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_d)$ abhängen.TAFEL035

TAFEL 034

geschickte anadoranpassunsen beim numerischen Integreren 2.8. Vierteleinheitskreisberechnung aus 2 Recht-



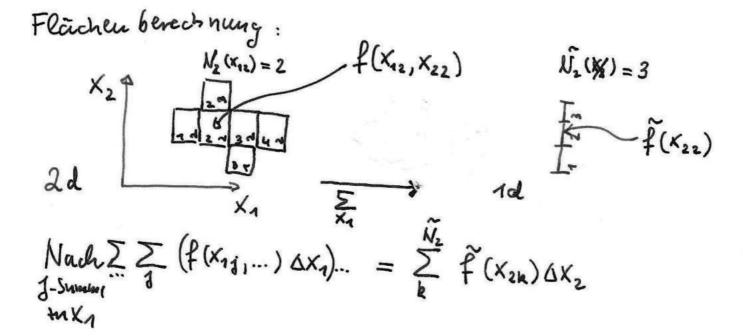
B: (1-12).h

$$A + 28 \approx 0.73$$

 $\Rightarrow TC \approx 4.0.73 \approx 3.16$

Tafel 035

Beispiel: Fubini - diskrete Summen



IX.2 Rückführung auf Integrale in einer Variablen - Fubini

Wenn man das Verfahren iteriert und bei den einzelnen Summen die Grenzwertbildung zum Integral ausführen kann und die Reihenfolge KEINE Rolle spielt, so findet man die Fubini-Auswertung des Integrals (I-RS):

$$\int_{V} f(\vec{r}) dV = \int_{a_{d}}^{b_{d}} dx_{d} \left(\dots \left(\int_{a_{1}(x_{2},\dots x_{d})}^{b_{1}(x_{2},\dots x_{d})} dx_{1} f(x_{1},\dots,x_{d}) \right) \right).$$

Die Anwendbarkeit ist z.B. erfüllt, wenn f in V stetig ist. Allgemeiner, wenn das Integral für |f| über V existiert.

Als Anwendung berechnen wir erneut die Viertelkreisfläche mit $F: x^2 + y^2 \le 1$ für $y \in [0, 1]$:

$$\int_{F} dx dy = \int_{0}^{1} dy \left(\int_{0}^{\sqrt{1-y^{2}}} dx \right) = \int_{0}^{1} dy \sqrt{1-y^{2}} =$$

$$= \frac{\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^{2}}}{2} \Big|_{0}^{1} = \pi/4.$$

weiteres Beispiel TAFEL036

TAFEL 036

Beispiel für Fubini - Verfahren

Road
$$X_2(K_1) = b - \frac{b}{a}X_1 \quad X_1 \in [0;a]$$

$$f(X_1,X_2) = X_1 \cdot X_2$$

$$\int dx_{1} dx_{2} f(x_{1}, x_{2}) = \int dx_{4} \left(x_{1} \cdot \int_{0}^{b-\frac{b}{a}x_{1}} x_{2}\right)$$

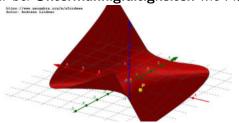
$$= \int dx_{1} \left[x_{1} \cdot \frac{1}{2} \left(b - \frac{b}{a}x\right)^{2}\right] = \int dx_{1} \left[\frac{1}{2} \left(b^{2}x_{1} - 2\frac{b^{2}}{a}x_{1}^{2} + \frac{b}{a}\right)^{2}x_{1}^{3}\right]$$

$$= \frac{1}{4} b^{2} a^{2} - \frac{1}{3} \frac{b^{2}}{a} a^{3} + \frac{1}{8} \left(\frac{b}{a}\right)^{2} a^{4} = b^{2} a^{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right)$$

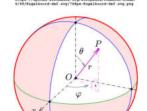
$$= b^{2} a^{2}$$

Mit Fubini-Auswertung können wir Integrale kartesischer Maße $dx_1 \dots dx_d =: d^dx$ im d-dimensionalen Raum über Volumina mit dem 1d Hauptsatz berechnen.

lacktriangle Was ist aber bei **Untermannigfaltigkeiten** wie Flächen in 3d



oder bei **krummlinige Koordinaten** statt $x_1 \dots x_d$?



Atps://upload.wikimedia.org/wikipedia/commona/thum

Determinanten als Volumenmaße dienen als Vorbild: Differentialformen vom Grad m kurz: m-Formen.

Otto Forster: Analysis. Band 3: Maß- und Integrationstheorie, Springer Spektrum, 2017.

Wir beginnen mit 1-Formen. Das Differential einer Funktion $f(\vec{r})$ mit $\vec{r} = (x_1, \dots, x_d)^T$ ist ein Beispiel für eine 1-Form,

$$df(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{d} \partial_i f \, dx_i \, .$$

Alle Ausdrücke der Gestalt

$$\mathcal{X}(\vec{r}) = X_1(\vec{r}) dx_1 + \ldots + X_d(\vec{r}) dx_d = \sum_{i=1}^d X_i(\vec{r}) dx_i$$

sind eine **1-Form** mit $X_i(\vec{r})$ als **Komponentenfunktionen**.

Als Integral der 1-Form über eine Kurve C mit Parametrisierung $\vec{r}(t)$ für $t \in [a,b]$ definieren wir wie früher

$$\int_{\mathcal{C}} \mathcal{X}(\vec{r}) := \int_{a}^{b} \sum_{i=1}^{d} \left(X_{i}(\vec{r}(t)) \frac{dx_{i}}{dt} \right) dt. \ (I - 1d)$$

 \blacktriangleright Bei Vorliegen eines Skalarproduktes gehört zu jeder 1-Form $\mathcal X$ ein Vektorfeld $\vec X(\vec r)$

$$\mathcal{X}(\vec{r}) = \left\langle \vec{X}(\vec{r}), d\vec{r} \right\rangle$$
.

Diese Interpretation, die ein Skalarprodukt voraussetzt, ist keineswegs notwendig für Formen, aber in der Physik oft üblich. In der Thermodynamik definieren die Integrale über 1-Formen Prozesse. Dabei gibt es kein Skalarprodukt.

- ▶ Beispiele sind die elektrische Feldform $\mathcal{E} = \left\langle \vec{E}, d\vec{r} \right\rangle$ und die magnetische Potentialform $\mathcal{A} = \left\langle \vec{A}, d\vec{r} \right\rangle$.
- ► Merke: Am Ende wird **bei** 1 **Formen** mittels einer Parametrisierung **über einen Parameter** integriert!
- ▶ Beispiel: Umfang eines Kreises $\int_{\mathcal{R}} ds$ mit $\vec{r}(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)^T$ und $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = R(-\sin\varphi, \cos\varphi)^T$. $\int_{\mathcal{R}} ds = \int_0^{2\pi} \|\vec{v}\| d\varphi = \int_0^{2\pi} R \, d\varphi = 2\pi R$. weiteres Beispiel TAFEL037

TAFEL 037

Buspiel eng Integrals emir 1- Form.

Ē=Ēo su en konstantes Feld

Schroenbenhie and Cenie £ € [0,41[

Und
$$C$$
 enie Schrenbentnie $t \in [$
 $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} g \cdot \cos t \\ g \cdot \sin t \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \vec{T}(t) = \begin{pmatrix} -g \cdot \sin t \\ g \cdot \cos t \end{pmatrix}$
 $\int \langle \vec{E}, d\vec{r} \rangle = \begin{pmatrix} -g \cdot \sin t \\ g \cdot \cos t \end{pmatrix}$

$$\int_{C} \langle \vec{E}, d\vec{r} \rangle = \int_{0}^{4\pi} dt \langle \vec{E}, \vec{r} \rangle$$

= \ dt (- Eo18 sint + Eo28 cost + Eo3.h)

0 + 0 + 4ThE03 = 4ThE03. 4IT = 2.2IT

2 Perioden

von cos, sin

▶ Das m fache Dachprodukt von m verschiedenen in aufsteigender Reihenfolge angeordneten Koordinatendifferentialen ist als das m-dimensionale differentielle Volumenelement festgelegt, über das wie vorher z.B. mit Fubini integriert werden kann:

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m := d^m x := dx_1 \ldots dx_m. (D-1)$$

Das Dachprodukt wird wie bei einer Determinante alternierend festgelegt:

$$dx_l \wedge dx_k = -dx_k \wedge dx_l \cdot (D-2)$$

(D-2) hat zwei gewünschte Effekte: (1) Das Volumen ist orientiert. (2) Automatisch **verschwindet** das Volumen, wenn im Dachprodukt irgendwo zweimal das gleiche Differential auftaucht!

▶ Jede **beliebige Linearkombination** von m-fachen Dachprodukten wie z.B. hier (d = 5, m = 3)

$$\Omega(\vec{r}) := \omega_1(\vec{r}) dx_5 \wedge dx_1 \wedge dx_4 + \omega_2(\vec{r}) dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \text{ (D - 3)}$$

definiert dann eine m-**Form**.

- ▶ Das Dachprodukt kann auch auf beliebige n-Formen angewendet werden. Es ist dann linear in jeder Komponente (multilinear) und alternierend.
- Sei $\Omega_1(\vec{r}) = \omega_1(\vec{r}) \, dx_3 \wedge dx_1$ und $\Omega_2(\vec{r}) = \omega_2(\vec{r}) \, dx_2 \wedge dx_4$, dann ist $\Omega_1(\vec{r}) \wedge \Omega_2(\vec{r}) = \omega_1(\vec{r}) \omega_2(\vec{r}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 = \omega_1(\vec{r}) \omega_2(\vec{r}) d^4x$. (D 4)
- ▶ Bei Koordinatenwechsel muss man lediglich die **übliche** Regel für das Differential anwenden, den Rest erledigt das Dachprodukt (D-5): Zum Beispiel bei ebenen Polarkoordinaten $x_1 = r \cos(\varphi)$ und $x_2 = r \sin(\varphi)$.

- $dx_1(r,\varphi) = \cos(\varphi)dr r\sin(\varphi)d\varphi \text{ und}$ $dx_2(r,\varphi) = \sin(\varphi)dr + r\cos(\varphi)d\varphi.$
- ▶ Im Flächenmaß $dx_1 \wedge dx_2$ bewirkt das Dachprodukt $(\cos^2 + \sin^2 = 1)$

$$dx_1 \wedge dx_2 = rdr \wedge d\varphi$$
.

Das würde auch geometrisch anschaulich TAFEL038 folgen, aber das Dachprodukt macht es automatisch richtig!

lacktriangle Wir können nun die Fläche eines Kreises mit Radius R einfacher berechnen als

$$\int_{K_R} dx_1 \wedge dx_2 = \int_{K_R} r dr \wedge d\varphi = \left(\int_0^R r dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \pi R^2.$$

Für Flüsse von Vektorfeldern in d=3 durch kleine Oberflächenstücke $\left\langle \vec{B}(\vec{r}), d\vec{F} \right\rangle$ genügt es, $d\vec{F}$ kartesisch zu definieren; bei Koordinatenwechsel nach obigem Rezept umrechnen: Einsetzen, Differenzieren, mit Dachprodukt Alternieren.

TAFEL 038

Flächen element un ebluen Polarkoordinaben aus gesmetrischer überlezung:

d St. St.

dratdy = Tdrdy

TAFEL 039

dry 5 dx 2

Oberfläcken elemente mit An Benorientierung eines kartesischen Onaclers

entlang x, : dx2 1 dx3

entlong x2: -dx11dx3 = dx31dx1

entlany x3 , dx1 1 dx2

Meso: $d\vec{F} = \begin{pmatrix} dx_2 n dx_3 \\ dx_3 n dx_1 \\ dx_1 n dx_2 \end{pmatrix}$

- ► In *d* Dimensionen können keine höheren als *d*-Formen auftreten (Warum?) Sie heißen **topdimensional**.
- Funktionen $f(\vec{r})$ nennt man auch 0-Formen. Ihr **Integral über Punkte** \vec{r}_a , die eine Orientierung \pm tragen können, meint den **orientierten Funktionswert**:

$$\int_{\{(-)\vec{r_a},(+)\vec{r_b}\}} f(\vec{r}) := f(\vec{r_b}) - f(\vec{r_a}).$$

- ▶ Die relevanten Formen in d = 3 mit kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 listen wir nun auf:
- ▶ Alle skalaren Funktionen $f(\vec{r})$ sind **0-Formen**.
- Alle 1-Formen können durch die Arbeit eines Vektorfeldes $\vec{E}(\vec{r})$ dargestellt werden

$$\mathcal{E}(\vec{r}) = E_1(\vec{r})dx_1 + E_2(\vec{r})dx_2 + E_3(\vec{r})dx_3 = \left\langle \vec{E}(\vec{r}), d\vec{r} \right\rangle.$$

Die 1-Form repräsentiert die **infinitesimale Arbeit** des Vektorfeldes.

▶ Alle **2-Formen** können auch durch den **Fluss eines Vektorfeldes** $\vec{B}(\vec{r})$ dargestellt werden:

$$\mathcal{B}(\vec{r}) = B_1(\vec{r})dx_2 \wedge dx_3 + B_2(\vec{r})dx_3 \wedge dx_1 + B_3(\vec{r})dx_1 \wedge dx_2$$
$$= \langle \vec{B}(\vec{r}), d\vec{F} \rangle.$$

 $d\vec{F}$ besteht aus orientierten 2-Formen, so wie man es auch anschaulich einem kartesischen Würfel abschaut TAFEL039:

$$d\vec{F} := (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)^T.$$

Die 2-Form repräsentiert den **infinitesimalen Fluss** des Vektorfeldes durch eine Oberfläche. (Radialer Vektorfeldfluss durch Kugeloberfläche in TAFEL040.)

Alle **3-Formen** können durch eine lokale **Dichte** mit Dichtefunktion $\rho(\vec{r})$ charakterisiert werden:

$$\mathcal{R}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \rho(\vec{r})d^3x.$$

Das sind auch die Objekte der Elektro- und Magnetostatik: **Arbeiten, Flüsse und Dichten**.

TAFEL 038

Flächen element un ebluen Polarkoordinaben aus gesmetrischer überlezung:

X X X

dratdy = Tdrdy

TAFEL 039

dx3 dx4

Oberfläcken elemente mit An Benorientierung eines kartesischen Onaders

entlong x, : dx2 n dx3

entlong x2: -dx11dx3 = dx31dx1

entlany x3 , dx1 1 dx2

Meso: $d\vec{F} = \begin{pmatrix} dx_2 n dx_3 \\ dx_3 n dx_1 \\ dx_1 n dx_2 \end{pmatrix}$

TAFEL 040

Déispiel fûr ein d-Form Integrul

iber eine Kugeloberkläche tum Radius R.

Sei $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B} \cdot \vec{r}$ $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B} \cdot \vec{r}$

sphärische Polarkoordinaten (Knzelkoordinaten)

 $X_1 = R \cdot \cos \varphi \sin \vartheta$ $\varphi \in [0, 2\pi L]$ $X_2 = R \cdot \sin \varphi \sin \vartheta$ $\vartheta \in [0, \pi L]$ $X_3 = R \cdot \cos \vartheta$

 $dx_1 = R(-\sin \varphi d\varphi) \sin \vartheta + R(\cos \varphi \cos \vartheta d\vartheta)$ $dx_2 = R(\cos \varphi d\varphi) \sin \vartheta + R(\sin \varphi \cos \vartheta d\vartheta)$ $dx_3 = -R \sin \vartheta d\vartheta$

 $dx_{2} n dx_{3} = -R^{2} \sin^{2} v \cos \varphi \ d\varphi n d\vartheta$ $dx_{3} n dx_{4} = R^{2} \sin^{2} v \sin \varphi \ d\vartheta n d\varphi$ $= -R^{2} \sin^{2} v \sin \varphi \ d\varphi n dv$

 $dx_{1} dx_{2} = -R^{2} \sin^{2} \varphi \sin^{2} \varphi \cos^{2} \varphi d\varphi d\varphi$ $+R^{2} \cos^{2} \varphi \sin^{2} \varphi \cos^{2} \varphi d\varphi d\varphi$ $= -R^{2} \sin^{2} \varphi \cos^{2} \varphi d\varphi d\varphi$

30 (Kn dx21dx3+x2 dx31dx1+x3 dx11dx2) =-30 R (sin2 v cos2 q sinv + sin2 v sin2 q sinv + cos2 v sinv) d qn dv

 $= -B_0 R^3 \left(\sin^2 \vartheta \sin \vartheta + \omega s^2 \sin \vartheta \right) dq 1 d\vartheta$ $= -B_0 R^3 \sin \vartheta d \rho \Lambda d\vartheta$ $= -B_0 R^3 \sin \vartheta d\rho \Lambda d\vartheta$

 $\int_{\mathbb{R}} \langle \vec{B}'(\vec{r}'), d\vec{F}' \rangle = +B_0 R^3 \int_{\mathbb{R}} d\varphi \int_{-\cos(pi)-(-\cos(0)=2)}^{\mathbb{R}} d\varphi$ $\int_{\mathbb{R}} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_{-\cos(pi)-(-\cos(0)=2)}^{\mathbb{R}} d\varphi \int_{-\cos(pi)-(-\cos(0)=2)}^{\mathbb{R}} d\varphi$

= 4 \(B \cdot R^3 \).

Vorzeichen +, da die Standardreihenfolge beim Maß erst theta dann phi ist, da die Basisvektoren so ein Rechtssytem bilden.

Zusammenfassung der Integrationsregeln mit Differentialformen im Euklidischen Raum d=3:

▶ Integral von 0-Formen $f(\vec{r})$ über Rand ∂I des Intervalls I:

$$f(\partial I) := \int_{\partial I} f(\vec{r}) = f(\vec{r}_b) - f(\vec{r}_a).$$

▶ Integral von 1-Formen $\left\langle \vec{E}(\vec{r}), d\vec{r} \right\rangle$ über Kurven \mathcal{C} :

$$\mathcal{E}(\mathcal{C}) := \int_{\mathcal{C}} \left\langle \vec{E}(\vec{r}), d\vec{r} \right\rangle = \int_{t}^{t_b} \left\langle \vec{E}(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \right\rangle dt.$$

▶ Integral von 2-Formen $\langle \vec{B}(\vec{r}), d\vec{F} \rangle$ über Oberflächen \mathcal{O} :

$$\mathcal{B}(\mathcal{O}) := \int_{\mathcal{O}} \left\langle ec{B}(ec{r}), dec{F}
ight
angle$$

 $= \int_{\mathcal{O}(y_1,y_2)} \left\langle \vec{B}(\vec{r}(y_1,y_2)), \partial_{y_1,y_2} d\vec{F}(y_1,y_2) \right\rangle \, dy_1 dy_2 \,, \ \, \text{wobei} \\ (\partial_{y_1,y_2} d\vec{F})(y_1,y_2) \, dy_1 dy_2 \, \, \text{die Umrechnung von } d\vec{F} \, \, \text{unter} \\ \text{Beachtung des Dachproduktes bezeichnet}.$

▶ Beim Integral von 3-Formen $\rho(\vec{r})d^3x$ über Volumina V,

$$\mathcal{R}(V) := \int_{V} \rho(\vec{r}) d^3x.$$

können wir nach Fubini kartesisch vorgehen, wenn sich das anbietet.

- ▶ Oft werden wir eine andere angepasste Koordinatenwahl $\vec{r}(y_1,y_2,y_3)$ vorziehen. Dann müssen wir d^3x nach den Regeln des Dachproduktes transformieren, $(\partial_{y_1,y_2,y_3}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)dy_1dy_2dy_3$.
- Dafür gibt es eine einfache Regel (Transformationssatz): Die Determinante der zugehörigen Jacobi-Matrix tritt als Umrechnungsfaktor auf:

$$\int_V \rho(\vec{r}) d^3x = \int_{V(y_1,y_2,y_3)} \rho(\vec{r}(y_1,y_2,y_3)) \det \frac{\partial (x_1,x_2,x_3)}{\partial (y_1,y_2,y_3)} d^3y \,.$$

Man nimmt den Betrag der Determinante, wenn der Koordinatenwechsel nicht orientierungstreu ist. (Beispiel radiale Dichtefunktion einer Kugel TAFEL041.)

TAFELOYI

S so e 1 1/6 dx

 $d^3x = dx_1 \cdot 1 dx_2 \cdot 1 dx_3$ in Kngel koordinatur

den = cospsint dr - rsing sind dp + r cospcoso do 1 rvariosel

dez = singsind dr + r cosq sind dq + r sing cosodo

dr3 = wsodt - rsinodo

dradgado dx11 dx21 dx3 = -T2 cos2 p sin2 y sin y - T' sin'q sin't sin d dradqadit -T' coi'q sint wit dender = - +2 (Sin 2 Sin 2 + cos 2 5 sin 2) Iradyado

= - r 2 sint dradquar d^3x Mso:

Sse IFWrod3 = (Jdp)(j+sinvdv) Jdre Tro

KR (o integral rechiner R 416 · (-10 (+210+210) e-1/10

= 4tt (2ro3 - To (R2+2roR+2ro2) e-R/ro).

IX.3 Integration mit Differentialformen

Wir schreiben die wichtigsten Maße in ebenen Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten auf:

 \blacktriangleright (d=2) ebene Polarkoordinaten: Flächenmaß:

$$dx_1dx_2 = rdrd\phi\,,$$

Bogenlänge auf Kreis vom Radius R: $ds = Rd\phi$.

▶ (d=3) Zylinderkoordinaten: Volumenmaß:

$$dx_1 dx_2 dx_3 = \rho d\rho d\phi dz ,$$

Oberflächenmaß auf Zylindermantel vom Radius R: $dF = Rd\phi dz$.

▶ (d = 3) Kugelkoordinaten: Volumenmaß:

$$dx_1 dx_2 dx_3 = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

Oberflächenmaß auf Kugeloberfläche vom Radius R: $dF = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$.

X. Integralsätze für Vektorfelder

X.1 Ableitung von Formen

X.2 Geschlossene und Exakte Formen

X.3 Allgemeiner Integralsatz von Stokes

X.4 Spezialfälle: Hauptsatz, Stokes, Green und Gauss

X.1 Ableitung von Formen

- ▶ Mit der äußeren Ableitung oder Cartan-Ableitung von Formen, $d\omega$ wird das Differential von Funktionen sinnvoll erweitert auf Formen.
- Sie wird einfach so definiert, dass man das Differential der Funktion vor dem Dachprodukt von Differentialen bildet und ins Dachprodukt dazu nimmt:

Sei $\omega(\vec{r}) = \omega_{1...m}(\vec{r}) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ eine m-Form, dann ist

$$d\omega(\vec{r}) = d\omega_{1...m}(\vec{r}) \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$$

mit $d\omega_{1...m}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{d} \partial_k \omega_{1...m}(\vec{r}) dx_k$ wie bisher.

▶ Beispiel: Sei $\omega = \omega_{12}(\vec{r})dx_1 \wedge dx_2$ eine 2-Form in d=3. Dann ist

$$d\omega = \partial_3 \omega_{12}(\vec{r}) \ dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = \partial_3 \omega_{12}(\vec{r}) \ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

eine 3-Form in d=3.

Natürlich soll d mit Linearkombinationen verträglich operieren, z.b. für $a,b\in\mathbb{R}$, soll $d(a\omega_1+b\omega_2)=a\cdot d\omega_1+b\cdot d\omega_2$. Weiteres Beispiel TAFEL042

Sei $\omega = x_1 \cdot x_2 dx_2 \wedge dx_3 - x_3^2 \cos(x_2) dx_1 \wedge dx_2$ eine 2 Form über \mathbb{R}^3 (koord. x_1, x_2, x_3) $d\omega = d(x_1 \cdot x_2) \wedge dx_1 \wedge dx_3 - d(x_3^2 \cos(x_2)) \wedge dx_1 \wedge dx_2$ set.

 $d(x_1,x_2) = x_2 \cdot dx_1 + x_1 dx_2$ $d(x_3^2 \cdot \omega_S(x_2)) = 2x_3 dx_3 \cdot \omega_S(x_1) + x_3^2 \cdot (-\sin(x_2)) dx_2$ $d\omega = x_2 \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 + \sigma$ $dx_2 \cdot dx_2 = \sigma$ $-2x_3 \cdot \omega_S(x_2) dx_3 \cdot dx_1 \cdot dx_2 + \sigma$ $dx_1 \cdot dx_2 + \sigma$ $dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \cdot dx_1 \cdot dx_3 + \sigma$

 $= (X_2 - 2X_3 \cdot \omega_S(K_2)) \cdot dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3$ $d\omega = (X_2 - 2X_3 \cdot \omega_S(X_2)) \cdot d^3x \quad \text{eine } 3\text{-Form}$ $\text{"ibv } \mathbb{R}^3.$

X.1 Cartan Ableitung von Formen

Für die äußere Ableitung folgt dann eine **Produktregel** aus der Produktregel für Differentiale und der alternierenden Eigenschaft des Dachproduktes. Sei ω_1 eine k-Form und ω_2 eine l-Form, dann ist (TAFEL043):

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

- Aus der Definition folgt: Ist ω eine m-Form, so ist $d\omega$ eine m+1-Form. d erhöht den Grad der Form um 1.
- Aus der Definition folgt auch:

$$dd\omega = 0$$
.

Denn alle Differentiale beim zweiten Ableiten mit d kamen schon beim ersten Ableiten mit d vor!

Produkt regel: (X) d (Wn 1 W2) = dWn 1 W2+(-) & Wnnd42

Bewisidee: Der Schreibersparnis wegen hehmen wir jewils nur lene Komponente an, d.h.

Wr = Wr(F) dxin 1... rdxik

k - Dachpwdukti

Wz = Wz(F) dxgn...ndxje

l - Dachfrodukte

Abhirrung dxin 1 ... dxin =: AdxI dxin 1 ... dxje =: AdxJ

d(W1/W2) = d(W1(P).W2(P))/ NdKI NdKy

normale $W_2(\vec{r})$ d $W_1(\vec{r})$ Λ $AdK_{\underline{\Gamma}}$ $AdK_{\underline{\Gamma}}$

dW2(F) ist une 1-Form also Summe über Koord.-Differentiale

= \frac{2\text{W2}}{2\text{Xm}}d\text{Xm}

tansche jedes an den k Dachprodukten von Adxr vorbei tum. Preis von (-1) k. Damit folgt

 $d(w_1 \wedge w_2) = (dw_1(\vec{r}) \wedge dx_1) \cdot w_2(\vec{r}) \cdot A dx_1$ $+ ((-1)^k w_1(\vec{r}) A dx_1) (dw_2(\vec{r}) \wedge A dx_1)$

(*)

X.1 Cartan Ableitung von Formen

Die Liste der Wirkungen von d auf 0-2-Formen in d=3 Euklidischen Räumen halten wir im Folgenden fest (Übung):

▶ Aus der 0-form $f(\vec{r})$ wird die 1-Form

$$d\!f(\vec{r}) = \langle \nabla f(\vec{r}), d\vec{r} \rangle = \mathrm{grad} f(\vec{r}) \ d\vec{r} \ . \ (\mathrm{Cd} - 1)$$

 $lackbox{ Aus der }1 ext{-form }\mathcal{E}(ec{r})=\left\langle ec{E}(ec{r}),dec{r}
ight
angle ext{ wird die }2 ext{-Form}$

$$d\left\langle \vec{E}(\vec{r}),d\vec{r}\right\rangle = \left\langle \nabla\times\vec{E}(\vec{r}),d\vec{F}\right\rangle = \left\langle \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}),d\vec{F}\right\rangle \ . \ (\mathrm{Cd}-2)$$

▶ Aus der 2-form $\mathcal{B}(\vec{r}) = \left\langle \vec{B}(\vec{r}), d\vec{F} \right\rangle$ wird die 3-Form

$$d\left<\vec{B}(\vec{r}),d\vec{F}\right> = \left<\nabla,\vec{B}(\vec{r})\right>d^3x = {\rm div}\vec{B}(\vec{r})~d^3x$$
 . (Cd $-$ 3)

X.2 Geschlossene und Exakte Formen

Aus der Eigenschaft dd = 0 folgen die Aussagen der Vektoranalysis (TAFEL044):

rot grad
$$f(\vec{r}) = \vec{0}$$
; div rot $\vec{A}(\vec{r}) = 0$;

- Formen ω mit $d\omega = 0$ nennt man **geschlossen**.
- Vorteilhaft ist es oft, wenn geschlossene Formen eine Stammform η haben (auch **Potential**form) genannt,

$$\omega = d\eta$$
.

Solche Formen mit Potential nennt man exakt.

- ▶ Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials für ω ist offenbar, $d\omega=0$. Anders ausgedrückt: **Aus Exakt folgt Geschlossen**.
- ► Für die Umkehrung, die **lokal immer möglich** ist, kommt es auf globale topologische Eigenschaften des Definitionsgebietes *D* an, um überall auf *D* ein Potential zu haben.

$$ddf = 0 \iff rot grad f = \vec{o} \qquad fiir n=3$$

Bewlis durch Nachtichnen:

$$df = \sum_{k=1}^{n} \partial_{k} f(\vec{x}) \cdot dx_{k}$$

Für n=3 bleiben wegen Antisymmetrie von dxpindxp

nur übrig: ddf = 12,2, f-2,2, f/dx, 1dx2

+ (223 f - 232 f) dx2 n dx3

+ (232, f-2,2, f) dx, 1 dx2

= 04 wegen Schwarz-Vertomschung (gilt genomso für beliebigs n)

h=3 rot grad
$$f = \text{rot} \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \partial_3 f - \partial_3 \partial_2 f \\ \partial_3 \partial_1 f - \partial_1 \partial_3 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\left[\left(\partial_{1} \partial_{2} A_{3} - \partial_{2} \partial_{1} A_{3} \right) + \left(\partial_{2} \partial_{3} A_{1} - \partial_{3} \partial_{2} A_{1} \right) + \left(\partial_{3} \partial_{1} A_{2} - \partial_{4} \partial_{3} A_{2} \right) \right]}{d^{3} \chi} = 0$$

$$div\left(\operatorname{yrt}\widetilde{A}^{i}\right) = \sum_{k=1}^{3} \partial_{k} \left(\partial_{k} A_{k''}\right) \mathcal{E}_{kk'k''}$$

$$= \left(\partial_{\lambda} \partial_{\lambda} A_{3} - \partial_{\lambda} \partial_{\lambda} A_{3}\right) + \left(\partial_{\lambda} \partial_{\lambda} A_{1} - \partial_{\lambda} \partial_{\lambda} A_{1}\right)$$

$$+ \left(\partial_{\lambda} \partial_{\lambda} A_{2} - \partial_{\lambda} \partial_{\lambda} A_{2}\right) = 0 \quad \text{were Schillers-V.}$$

$$(=) \quad dd\left(\widetilde{A}^{i} d\widetilde{r}\right) = 0$$

Beweisskitze turn Princare-Lemma tür 1-Forman da ist es noch frei vom «Alternieren".

Versuch, das telebolesciente von nur 1- Variablen tu bekommen $\vec{\tau} = t \cdot \vec{x}$ dx = d(t·xk) = xk·dt

$$Z_{k}(t\cdot\vec{x})\cdot X_{k}(t\cdot\vec{x}) \cdot X_{k}(t\cdot\vec{x}) = \partial_{t}f(t\cdot\vec{x}) d(t\cdot X_{k}) = (\partial_{t}f(t\cdot\vec{x})) \cdot dt$$

$$Z_{k}(t\cdot\vec{x})(\vec{x}) = \partial_{t}f(t\cdot\vec{x}) \Rightarrow f(\vec{x}) = \int_{t}^{t} dt \partial_{t}f(t\cdot\vec{x}) + f(\vec{x})$$

 $(X') = \int dt \partial_t f(t \cdot \vec{X}) + f(\vec{b})$ $= \int dt \propto (t \cdot \vec{X})(\vec{X})$ $= \int dt \propto (t \cdot \vec{X})(\vec{X})$

Das geht, sveange die Weze Ö+tx t∈[0,1] wee un Gebirt sind (cleshalb a straformis')

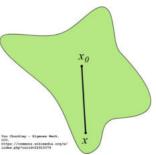
Merke: Potential durch Integration langs Strahlen.

X.2 Geschlossene und Exakte Formen

Es gilt das **Poincare-Lemma** für alle geschlossenen Formen: Ist $d\omega=0$ auf D und ist D **sternförmig**, so existiert ein Potential η auf ganz D, (grobe Beweisskizze für 1-Formen TAFEL045)

$$\omega = d\eta$$
.

D heißt sternförmig : \Leftrightarrow Es gibt einen Punkt $P_0 \in D$, von dem aus alle Geraden zu Punkten P auch noch in D liegen.



Es gibt **Eichfreiheit**: Jedes Potential η kann um eine exakte Form ergänzt werden, $\eta' := \eta + d\chi$ ist auch ein Potential (TAFEL046).

$$div\left(\operatorname{yrt}\widetilde{A}^{i}\right) = \sum_{k=1}^{3} \partial_{k} \left(\partial_{k} A_{k''}\right) \mathcal{E}_{kk'k''}$$

$$= \left(\partial_{\lambda} \partial_{\lambda} A_{3} - \partial_{\lambda} \partial_{\lambda} A_{3}\right) + \left(\partial_{\lambda} \partial_{\lambda} A_{1} - \partial_{\lambda} \partial_{\lambda} A_{1}\right)$$

$$+ \left(\partial_{\lambda} \partial_{\lambda} A_{2} - \partial_{\lambda} \partial_{\lambda} A_{2}\right) = 0 \quad \text{were Schillers-V.}$$

$$(=) \quad dd\left(\widetilde{A}^{i} d\widetilde{r}\right) = 0$$

Beweisskitze turn Princare-Lemma tür 1-Forman da ist es noch frei vom «Alternieren".

Versuch, das telebolesciente von nur 1- Variablen tu bekommen $\vec{\tau} = t \cdot \vec{x}$ dx = d(t·xk) = xk·dt

$$Z_{k}(t\cdot\vec{x})\cdot X_{k}(t\cdot\vec{x}) \cdot X_{k}(t\cdot\vec{x}) = \partial_{t}f(t\cdot\vec{x}) d(t\cdot X_{k}) = (\partial_{t}f(t\cdot\vec{x})) \cdot dt$$

$$Z_{k}(t\cdot\vec{x})(\vec{x}) = \partial_{t}f(t\cdot\vec{x}) \Rightarrow f(\vec{x}) = \int_{t}^{t} dt \partial_{t}f(t\cdot\vec{x}) + f(\vec{x})$$

 $(X') = \int dt \partial_t f(t \cdot \vec{X}) + f(\vec{b})$ $= \int dt \propto (t \cdot \vec{X})(\vec{X})$ $= \int dt \propto (t \cdot \vec{X})(\vec{X})$

Das geht, sveange die Weze Ö+tx t∈[0,1] wee un Gebirt sind (cleshalb a straformis')

Merke: Potential durch Integration langs Strahlen.

Eichfreiheit: 1st eine Folge vom dd=0

Seidn=w und n'= n+dx

 $\Rightarrow dy' = dy + ddx = dy = \omega$

Also ist Manch eine Potential form.

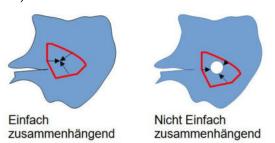
[Bein der tralipis in 1d ist das

dos Behannte: Eindentige Stammfunktion bis auf

evie Konstantec: F'=f F'+c' = f]

X.2 Geschlossene und Exakte Formen

▶ Der Spezialfall rot $\vec{E}(\vec{r})=0$ erlaubt ein Skalar-Potential: $\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{grad}\ \Phi(\vec{r})\ (-$ ist Konvention), sobald das Definitionsgebiet D einfach zusammenhängend ist : \Leftrightarrow Jede geschlossene Kurve lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen, ohne dass sie an einer Lücke hängenbleibt (TAFEL047).



Sternförmige Gebiete sind immer einfach zusammenhängend, umgekehrt gilt das nicht immer.

▶ Der Spezialfall div $\vec{B}(\vec{r}) = 0$ erlaubt ein Vektor-Potential auf sternförmigen Gebieten: $\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$.

Tatel 047

Gegenbeispiel für Versagen des Potentials auf nicht enifach sohr En sammen hängen dem Gebief wie es du Punktierte Ebene ist [R1203].

$$\frac{1 \text{ Form}}{X^2 + y^2} = : \omega$$

$$d\omega = \frac{-d \times n \, dy + dy \, n \, dx}{(X^2 + y^2)^2} + \frac{\partial x^2 \, d \times n \, dy + \partial y^2 \, d \times n \, dy}{(X^2 + y^2)^2}$$

= 0 wegen dyrdx = -dxrdy

Ant guille R1203 gibt es nur lin Potential wenn man es schlitzt,

so dass R1{[0,00[xiR]}

enifactestigdwird

Wenn man un das "Loch" langen kann

heapt es nicht: $\frac{2.8}{5.8}$ $\int \omega = \int \frac{-\cos \varphi \cdot \cos \varphi \, d\varphi - \sin \varphi \, \sin \varphi \, d\varphi}{\int \int \frac{-\sin \varphi \cdot \sin \varphi \, d\varphi}{\int \int \frac{-\cos \varphi \cdot \cos \varphi \, d\varphi}{\int \int \frac{-\cos \varphi$

 $X = \Gamma \omega S P$ $Y = \Gamma S mi P$ $Y = \Gamma S mi P$ $X = \Gamma \omega S P$ $Y = \Gamma S mi P$ $X = \Gamma \omega S P$ $Y = \Gamma S mi P$ $X = \Gamma \omega S P$ $Y = \Gamma S mi P$

Gabe es en Potential auf sant R120> mirsste jedes geschlossene Wegintegral = 0 sein.

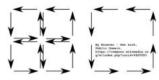
X.3 Allgemeiner Integralsatz von Stokes

- Verallgemeinerung des Hauptsatzes: Der allgemeine Integralsatz von Stokes:
- ▶ Sei ω eine m-Form, zu der $d\omega$ als m+1 Form stetig auf dem m+1 dimensionalen Gebiet M ist, dann existiert das Integral $\int_M \mathrm{d}\omega =: d\omega(M)$ und ist identisch mit dem Integral von ω über der Randmenge ∂M , $\int_{\partial M} \omega =: \omega(\partial M)$:

$$\int_{M} d\omega = \int_{\partial M} \omega ,$$

bzw. kompakt geschrieben: $d\omega(M) = \omega(\partial M)$.

▶ Die Beweisidee ist ähnlich wie beim Hauptsatz: Änderungen innen heben sich beim Summieren auf (TAFEL048):



Beweisideen tun Sats von Stokes

analog tum Bewis des Hauptsakes SdF = SF

Ansgehend von SF = F(6)-F(a) wird

I terlegt in viele Teilintervalle mit Rändern

So dass: - -+ -+ -+ -+ AX = 6=XH

 $F(x_N) - F(x_0) =$

F(x1) - F(K0) +

F(X2) - F(X1) + ...

und lineare Approximation miglich wird

F(KN) - F(KN-1)

 $F(x_{i+n}) - F(x_i) = F'(x_i) \cdot \Delta x$ $| \Delta x - \nabla x -$

2 wesentliche Ideen:

(1) Zerlesungsschritte

+- + F(x2)-F(x.)

X. X1 X2 =+F(X1)-F(X0)+

 $F(X_2) - F(X_1)$

(2) Lineare Approximation and kleinen Intervallen

 $dF(x_i) = F'(x_i) dx$

F(b)-F(a)=SF = Z dF(x:) = SdF 2I i dF(x:) = SdF

Der Hauptsatz ist Stokes für FO-Form, df 1-Form Analog e Beweisideln für Stokes

für 1-Form (Ä(i); di') in DF Rend einer Fläche

S(Ä; di') (1)
(2) d(Ä, di') = Grot Ä, di') linear

2-Form Approxim.

S(Ä; di') = S(rot Ä, di')

DF

und für 2-Form (B; di') zu DV Rend

und für 2-Form $\langle \vec{B}; d\vec{F} \rangle$ zu ∂V Rend leine s Volumens V $S(\vec{B}; d\vec{F})$ (1) $\frac{1}{2}$ Leine sun g $\frac{1}{2}$ Line ar Aprox. g - Form $\frac{1}{2}$ Line ar Aprox. g - Form

X.4 Spezialfälle: Hauptsatz, Stokes, Green und Gauss

▶ Der **Hauptsatz** ist der Spezialfall für eine Funktion $f(\vec{r})$ als 0-Form, in kompakter Schreibweise wie schon eingeführt:

$$f(\partial I) = df(I)$$
.

▶ Der **originale Satz von Stokes** betrifft die Vektorfelder zu 1-Formen und deren Rotation als 2-Formen über Flächen F mit Rand ∂F :

$$\int_{F} \left\langle \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}), d\vec{F} \right\rangle = \int_{\partial F} \left\langle \vec{E}(\vec{r}), d\vec{r} \right\rangle .$$

▶ Ein weiterer Spezialfall in d=2 mit 1-Formen ist der **Satz** von Green für zwei Funktionen $f(x_1,x_2)$, $g(x_1,x_2)$ (hat auch Bedeutung in der Funktionentheorie):

$$\int_{F} \left(\frac{\partial g(\vec{r})}{\partial x_{1}} - \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_{2}} \right) d^{2}x = \int_{\partial F} f(\vec{r}) dx_{1} + g(\vec{r}) dx_{2} .$$

X.4 Spezialfälle: Hauptsatz, Stokes, Green und Gauss

Schließlich ist der **Satz von Gauss** der Spezialfall für ein Vektorfeld zu einer 2-Form mit zugehöriger Quellstärke:

$$\int_{V} \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}) \ d^{3}x = \int_{\partial V} \left\langle \vec{D}(\vec{r}), d\vec{F} \right\rangle \ .$$

Dieser ist z.B. in der Elektrostatik wichtig bei der Gesamtladung Q, wobei die Ladungsdichte ρ die Quellstärke der elektrischen Verschiebung \vec{D} bestimmt. In der Elektrodynamik und anderen Kontinuumsdynamiken tritt der Satz von Gauß als globale Version der Kontinuitätsgleichung (TAFEL049) auf:

$$\dot{Q}(V) = -\mathcal{I}(\partial V) = -\int_{\partial V} \left\langle \vec{j}(\vec{r}), d\vec{F} \right\rangle .$$

In Worten: Die zeitliche Zunahme einer Erhaltungsgröße für ein endliches Volumen entspricht dem Zufluss der Größe, die über den Rand erfolgt. Beispiele für Anwendungen der Integralsätze TAFEL050.

von lokaler Konfinnitätsgliichen g In globdem Erhaltungssatz

Dichte 3 der Größe Q = SødV Stromdichte J' mit 9 un lokaler Kontinnität.

 $\int_{V} \dot{s} \, dV = \frac{d}{dt} \, Q$

- Sdiv J'dV = - SKJ, dF)

V Stokes DV

Damit global: Q=- S(j,dF)

Was von der Gesamtgröße Q in Inneren von V geändert wird, muss durch die Oberfläche strömen. (Q10 -> Strömung >0)

(I) Beispiel für Massischen Sate von Stokes

0

$$\vec{A}(x_{i}z_{i}z) = \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$$

Flaidre sei Halbkuzelsdade

F: X2+32+22=1 fir 2 20

 ∂F : Kreis bui z=0 $x^2+y^2=1$ $t\mapsto (suit)$ $t\in [0,2\pi[$

$$\gamma rt \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dF auf der Kngeloberfläche ~ Er

GEL972] 9 E (0,25]

in Kngel koordinaten (folgt and durch

dF=

Sin & cos op Sin & dodo

cos of Sin & dodo

von dF = (den de)

dxndg)

= 5 T/2 do (0+0+ 2TE coso.sino)

 $= 2\pi \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$

$$\begin{array}{lll}
\boxed{II} & \text{Jeisfill} & \text{fiir} & \underline{\text{Satz}} & \text{son Gunb} \\
\boxed{D}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z^2 \end{pmatrix} & V &= 1 \text{-Kingl} \\
X^2 + y^2 + z^2 &\leq 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{div } \overrightarrow{D} &= 1 + x + 3z^2 & \text{knyelkoordin oden } \tau, \theta_1 \varphi \\
\text{dV} &= \tau^2 \sin \theta \operatorname{drapd\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{C} \tau &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \theta & \sin \theta & \sin \theta & \sin \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin \theta & \sin \theta & \sin \theta \\ \cos \theta & \cos \theta & \sin \theta & \cos \theta & \cos \theta \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{C} \tau &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \theta & \sin \theta & \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \cos \theta & \sin \theta & \cos \theta & \cos \theta \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{C} \tau &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \theta & \cos \theta & \cos \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \cos \theta & \cos \theta & \cos \theta \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{C} \tau &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \theta & \cos \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \cos \theta & \cos \theta \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{C} \tau &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin^2 \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \\ \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{C} \tau &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \\ \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{C} \tau &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin^2 \theta \\ \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{C} \tau &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin^2 \theta \\ \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{$$

XI. Differentialgleichungen

- XI.1 Einführung und Klassifizierung
- XI.2 Trennung der Variablen
- XI.3 Lineare Differentialgleichungen LDGL 1. Ordnung
- XI.4 Lineare Differentialgleichungen LDGL 2. Ordnung
- XI.5 Lineare Differentialgleichungssysteme LDGS
- XI.6 Stabilitätsanalyse für DGL 1. Ordnung

- ► Gleichungen, in denen Variablen, Funktionen und Ableitungen von Funktionen auftreten heißen **Differentialgleichungen**.
- Nommen nur Funktionen und Ableitungen nach einer Variablen vor, t, $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$, handelt es sich um **gewöhnliche Differentialgleichungen** (gDGL).
- Insbesondere die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen für die Bahnen $\vec{r}(t)$ eines Massenpunktes.

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t).$$

Wichtige Spezialfälle sind

$$\ddot{z}(t) \equiv -g; \ \ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t),$$

die dem freien Fall im konstanten Schwerefeld mit Beschleuinigung g bzw. einer Schwingung an einer elastischen Feder mit Federkonstante k (beides ohne Reibung) entsprechen.

Die Lösung der gDGL des freien Falles, $\ddot{z}=-g$, geht in zwei Schritten **durch Integration**. Da zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit die Beziehung $\ddot{z}=\dot{v}_z$ besteht, gilt $dv_z(t)/dt=-g$. $v_z(t)$ ist also eine Stammfunktion zur Konstanten -g, also $v_z(t)=-gt+v_{z0}$. Dabei kann die Integrationskonstante v_{z0} mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_z(t=0)=v_{z0}$ identifiziert werden. Die Lagefunktion z(t) ist nun ihrerseits eine Stammfunktion zu $v_z(t)=\dot{z}(t)$. Damit ist schließlich die allgemeine Lösung:

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{z0}t + z_0,$$

wobei z_0 die Anfangslage zur Zeit t=0 ist.

Die Lösung der gDGL der Schwingung an einer elastischen Feder (Harmonischer Oszillator) geht mit Ansatzfunktionen. Da die Schwingungsfunktionen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ beide beim zweifachen Ableiten nach t sich reproduzieren mit dem Vorfaktor $-\omega^2$, kann man eine Lösung für beliebige Anfangsorte x_0 und Anfangsgeschwindigkeiten v_0 konstruieren:

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t).$$

Durch Einsetzen in die gDGL $\ddot{x} = -(k/m)x$ folgt, dass man

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

wählen muss. Durch Vergleich sieht man, dass die Konstanten $a=x(t=0)=x_0$ und $b=\dot{x}(t=0)/\omega=v_0/\omega$ zu wählen sind.

Tritt bei gDGL die Variable t nur in der gesuchten Funktion x(t) und ihren Ableitungen auf, aber nicht in den übrigen Termen, so nennt man die gDGL **autonom**.

Beispiel anhand der vorigen Spezialfälle: Die Parameter der gDGL wie z.B. Masse m und Federkonstante k sind konstant in der Zeit. Die gDGL ist autonom.

Würden sie sich ändern durch zusätzliche Einflüsse von "außen", so ist die gDGL nicht mehr autonom.

Die Zeitabhängigkeit der Parameter entsteht dabei durch etwas, das außerhalb der gDGL beschrieben werden muss. In dem Sinne verliert sie damit ihre "Autonomie" für die Beschreibung der Zeitabhängigkeit von $\boldsymbol{x}(t)$.

- Bei Feldern mehrere Variablen mit partiellen Ableitungen handelt es sich um partielle Differentialgleichungen (pDGL).
- ▶ Die Feldgleichung $(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\phi(x,y,z) = -\frac{1}{\epsilon}\rho(x,y,z)$ (Poisson-Gleichung) für das Potential ϕ der Elektrostatik zur Ladungsdichte ρ ist ein Beispiel.
- Lösungen einer gDGL sind nicht eindeutig (analog zu Stammfunktionen). Erst durch Anfangsbedingungen werden sie zu eindeutigen Lösungen des sog. Anfangswertproblems.
- ▶ Bei einer gDGL n-ter Ordnung (die höchste vorkommende Ableitung ist von der Ordnung n) kann man n Anfangsbedingungen i.d.R. für die gesuchte Funktion und ihre n-1 Ableitungen als festgelegte Werte zu einem Zeitpunkt t_0 vorgeben.
- ▶ Bei einer allgemeinen Lösung gehen diese Anfangswerte als Parameter einer Lösungsschar von Funktionen ein.

- ▶ Bei pDGL gehören zur Eindeutigkeit Vorgaben von Randwerten der gesuchten Funktionen und ggf. ihrer Ableitungen dazu.
- ▶ **Zur Poissongleichung**: Das Coulomb-Potential $\phi(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r}$ ist als eine Lösung für eine Ladungsdichte einer Punktladung im Ursprung r=0 durch Newton/Coulomb bekannt.
- Allgemeine Ladungsdichte ρ als **Superposition bzw.**Integration von Punktladungen möglich.
- Weil die Poissongleichung eine **lineare pDGL** ist, werden Lösungen zu einer allgemeinen Ladungsdichte $\rho(x,y,x)$ auch durch **Superposition bzw. Integration** der entsprechenden Coulomb-Potentiale gebildet.
- Wegen der Superponierbarkeit der Coulomb-Lösung nennt man sie auch **Fundamentallösung** der Poisson-Gleichung oder nach einem der Entdecker dieser Methode, **Greensche Funktion** der Poisson-Gleichung (zur Randbedingung: $\phi \to 0$ für $r \to \infty$)

- Hier nur wichtige Stichworte für die Behandlung linearer pdGL:
- Fundamentallösung (Greensche Funktion) zum Randwertproblem und anschließende Superposition.
- Zum Auffinden von Fundamentallösungen:
- ▶ Separationsansätze wie $\phi(x,y,z)=f(x)g(y)h(z)$ in Kombination mit an Symmetrien angepasste Koordinaten (z.B $\phi(\vec{r})=\phi(r)$ für kugelsymmetrische Lösungen). Dadurch entstehen gDGL.
- Alternative Ansätze mit periodischen Funktionen (Typ $e^{\imath \vec{k} * \vec{r}} e^{\imath \omega t}$), die die pDGL in algebraische Gleichungen überführen. Die Methode verbirgt sich hinter den Namen Fourier-Transformation oder Laplace-Transformation.

XI.2 Trennung der Variablen

Bei gDGL ist eine Lösung durch Integrale immer dann möglich, wenn man die Differentiale von Größen trennen kann:

$$\dot{x} = f(t)g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)}dx = f(t)dt$$
.

Die Lösung gewinnt man aus den Integralen

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(x)} dx = \int_{t_0}^{t} f(t') dt'$$

durch Umstellen nach x(t).

▶ Einachstes Beispiel: $\dot{x}(t) = f(t) \Leftrightarrow dx(t) = f(t)dt \Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} dx(t) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \Rightarrow x(t_1) - x(t_0) = F(t_1) - F(t_0)$ mit Stammfunktion F zu f. (weitere Beispiele Tafel 051)

TAPEL 051

Trennung der Variablen

a)
$$\dot{X} = \lambda X$$

2 Konstante

$$\langle = \rangle \frac{dx}{x} = \lambda dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x_t} \frac{dx}{x} = \lambda \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\Rightarrow$$
 $x_t = x_o e^{\lambda(t-t_o)}$

$$\dot{X} = 8 \times (1 - \frac{x}{K})$$
 8>0 Weedstums rate für $x < K$ (Kaparität")

$$\Rightarrow \lim_{|K| \to 1} \frac{|K| + |K|}{|K| \times |K|} = \frac{|K| \times |K|}{|K|} = \frac{|K| \times$$

$$\Rightarrow \chi_{t} = \frac{1 + (\frac{K-X_{0}}{X_{0}})e^{-Y(t-t_{0})}}{1 + (\frac{K-X_{0}}{X_{0}})e^{-Y(t-t_{0})}}$$

XI.3 LDGL 1. Ordnung

▶ Eine LDGL 1. Ordnung ist von folgender Form:

$$\dot{x}(t) = -\gamma(t)x(t) + \rho(t) ,$$

wobei $\gamma(t)$ und $\rho(t)$ i.A. Funktionen der Variablen t sind.

- $\rho(t)$ heißt auch **Inhomogenität** der LDGL. Für $\rho \equiv 0$ wird die LDGL homogene LDGL genannt.
- ► LDGL lassen sich vollständig lösen mit Hilfe eines Exponential-Ansatzes und Integralen.
- ► Der Ansatz lautet:

$$x(t) = A(t)e^{-\Gamma(t)}, \ x(t_0) = A(t_0)e^{-\Gamma(t_0)}.$$

Einsetzen in die LDGL liefert dann (TAFEL052):

$$\dot{\Gamma} = \gamma \; ; \; \dot{A} = \rho e^{\Gamma},$$

was wir durch Integration lösen können.

$$\Rightarrow \ddot{\Gamma} = 8 \quad 8 \quad g = \dot{A} e^{\Gamma} \Rightarrow \dot{A} = g e^{\Gamma} \Rightarrow$$

XI.3 LDGL 1. Ordnung

► Die Integrale sind

$$\Gamma(t) = \Gamma(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \gamma(t'); \ A(t) = A(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \rho(t') e^{\Gamma(t')}.$$

- Wir benötigen nur eine Integrationskonstante zur Anpassung an eine Anfangsbedingung und setzen $\Gamma(t_0) = 0$.
- ▶ Damit lautet die allgemeine Lösung zu einer Anfangsbedingung $x(t_0)$:

$$x(t) = x(t_0)e^{-\int_{t_0}^t dt' \gamma(t')} + \left(\int_{t_0}^t dt' \rho(t')e^{\int_{t_0}^{t'} dt'' \gamma(t'')}\right)e^{-\int_{t_0}^t dt' \gamma(t')}.$$

Bemerkungen: (1) Die homogene Version ($\rho=0$) lässt sich auch durch Trennung der Variablen lösen. (2) Eine Lösung zur Anfangsbedingung $x(t_0)$ ist identisch mit dem ersten Term der allgemeinen Lösung. Das ist bei **LDGL immer der Fall**, dass man eine allgemeine Lösung als **Summe einer allgemeinen Lösung der homogenen Version plus einer speziellen Lösung der inhomogenen** bekommen kann.

XI.3 LDGL 1. Ordnung

- Als Beispiel seien $\gamma, \rho > 0$ Konstante und die LDGL das **Modell einer Populationsentwicklung** mit Anzahl x(t) in der Zeit mit **populationsunabhängiger Zuwachsrate** ρ und einer **populationsproportionalen Abnahmerate** mit Proportionalitätskonstante γ . (weiteres Beispiel Stromkreis mit Kapazität und Widerstand TAFEL053)
- ▶ Dann ist $\Gamma(t) = \gamma(t t_0)$ und $A(t) = x(t_0) + (\rho/\gamma) \left(e^{\gamma(t-t_0)} 1\right)$.
- ▶ Die allgemeine Lösung zum Anfangswert $x(t_0)$ ist dann:

$$x(t) = \left(x(t_0) - \frac{\rho}{\gamma}\right) e^{-\gamma(t-t_0)} + \frac{\rho}{\gamma}.$$

- ▶ Langfristig strebt die Population zu einem stabilen Wert ρ/γ .
- Das Modell beschreibt auch einen Temperaturausgleich eines Getränks mit Anfangstemperatur $x(t_0)$ auf Raumtemperatur ρ/γ mit der charakteristischen Anpassungszeit $1/\gamma$ (Nach $1/\gamma$ auf 1/e-tel des Ausgangswertes abgeklungen).

Stromkris dus Spannungsquelle V(t), Ohmschem Widerstand R und Kapität C für die Ladung Q(t). Der Stromist I(t)=Q(t)

geschlossene Potentialschteite

$$\dot{Q}(t) + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{1}{R}V(t)$$

Die allgemeine Lösung anscwendet (Stadt = felt-to))

lui fert
$$Q(t) = Q(t_0) e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}}$$

$$+ \int_0^t dt' \frac{1}{R} V(t') e^{-\frac{1}{RC}(t-t')}$$

$$+ \int_0^t dt' \frac{1}{R} V(t') e^{-\frac{1}{RC}(t-t')}$$

Counc V exponentielles Abblirsen ?

(ponstantes V: Q(t) -> CV]

TAFEL 054

$$(\Rightarrow) \dot{X}_2 = -YX_1 + S$$

$$\dot{X}_1 = \dot{X}_2$$

$$(=)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{2} = -8x_{1} + 8 \Rightarrow (x_{1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1} \\ x_{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

► Eine LDGL 2. Ordnung ist von folgender Form:

$$\ddot{x}(t) + \gamma(t)\dot{x}(t) + \kappa(t)x(t) = a(t),$$

wobei $\gamma(t)$ und k(t) und f(t) i.A. Funktionen der Variablen t sind.

Man kann das auch mit einem linearen Differentialoperator L schreiben als Lx=a mit

$$L := \left[\frac{d^2}{dt^2} + \gamma(t) \frac{d}{dt} + \kappa(t) \right] ,$$

• Wegen der Linearität des Operators L gilt: Hat man eine spezielle Lösung x_s zu Lx=a und zwei Lösungen x_1,x_2 (die nicht Vielfache voneinander sind) der homogenen LDGL, Lx=0, so ist auch jede Linearkombinationen von x_1,x_2 wieder eine homogene Lösung und addiert man dazu x_s , so hat man wieder eine spezielle Lösung. So kann jede allgemeine Lösung dargestellt werden.

Im folgenden sind γ und κ Konstanten.

▶ Die homogene Gleichung, Lx = 0, (gedämpfter Harmonischer Oszillator) lösen wir mit einem Exponential-Ansatz:

$$x(t) = Ae^{\lambda t}; A, \lambda \in \mathbb{C}.$$

► Einsetzen in die homogene Gleichung liefert:

$$\lambda^2 + \lambda \gamma + \kappa = 0.$$

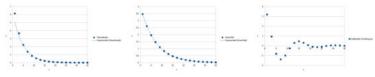
Die komplexen zwei Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \kappa}$$

erlauben eine allgemeine reellwertige Lösung der homogenen Gleichung als Superposition:

$$x_h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_1 t}.$$

- Abhängig vom Vorzeichen unter der Wurzel drei Fälle:
- ▶ Überdämpfter FallI: $\frac{\gamma^2}{4} > \kappa$. $\lambda_{1,2}$ sind dann beide reell und negativ. x(t) klingt für lange Zeiten recht schnell auf Null ab.
- ▶ Kriechfall: $\frac{\gamma^2}{4} = \kappa$. $\lambda_{1,2}$ sind dann beide gleich, $-\frac{\gamma}{2}$, und reell und negativ. x(t) klingt für lange Zeiten auf Null ab, allerdings so langsam wie möglich ohne, dass es zu Schwingungen kommt (bei Stoßdämpfern erwünscht).
- ▶ Gedämpfter SchwingungsfallI: $\frac{\gamma^2}{4} < \kappa$. $\lambda_{1,2}$ sind komplex kongugierte zueinander und der Imaginärteil bedeutet reele Frequenzen einer Schwingung. x(t) klingt für lange Zeiten auch auf Null ab, aber vollführt dabei noch Schwingungen.



Der physikalisch vielleicht interessanteste Fall einer Inhomogenität a(t) ist der Fall der **erzwungenen** Schwingung:

$$a(t) = a\sin(\Omega t),$$

was einer periodischen Beschleunigung von außen als Antrieb entspricht (Schaukel anschubsen) mit externer Frequenz Ω und Stärke a.

► Für den gedämpften Schwingungsfall ist die **Eigenfrequenz** des gedämpften Oszillators

$$\omega = \sqrt{\kappa - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \,.$$

Im erzwungenen Schwingungsfall findet man das enorm wichtige Phänomen der **Resonanz** modellhaft beschrieben.

Für eine spezielle Lösung macht man den Ansatz

$$x_s(t) = x_0 \sin(\Omega t + \alpha),$$

mit einer Phasenverschiebung α gegenüber dem Antrieb.

- ▶ Das löst die LDGL, wenn x_0 und α von den Paramtern des Modells spezifisch abhängen (Herleitung z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Erzwungene_Schwingung)
- Insbesondere gilt für die Amplitude

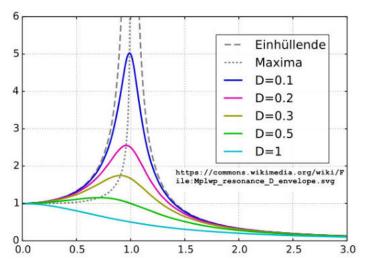
$$x_0 = \frac{a}{\sqrt{(\kappa - \Omega^2)^2 + (\gamma \Omega)^2}},$$

was zu einer stark verstärkten Amplitude bei der **Resonanzfrequenz** führt.

$$\omega_R = \sqrt{\kappa - \frac{\gamma^2}{2}} \,.$$

► Entfernt sich die Anregungsfrequenz Ω deutlich von der Resonanzfrequenz ω_B , kommt die Schwingung zum Erliegen.

Die Amplituden bei der erzwungenen Schwingung als Funktion des Verhältnisses von äußerer Frequenz Ω zur ungedämpften Eigenfrequenz $\sqrt{\kappa}$ für verschiedene die Dämpfung beschreibende Parameterwerte D.



XI.5 Anmerkungen zu LDG Systeme

Führt man bei einer LDGL n-ter Ordnung die k-te Ableitung $x^{(k)}$ als neue Variable ein, x_k , so wird die LDGL n-ter Ordnung zu einem LDG-System der Dimension n für einen Vektor $\vec{x}(t)$, das durch eine $n \times n$ Matrix M und einen n-dimensionalen Vektor \vec{n} für die Inhomogenität beschrieben wird (Beispiel TAFEL054):

 $L\vec{x}=\vec{n}$ mit

$$L := \left\lceil \frac{d}{dt} - M \right\rceil .$$

Auch in anderen Zusammenhängen können Systeme von linearen DGL auftreten. Immer dann, wenn es mehr als eine Variable gibt, deren Dynamik beschrieben werden soll. Die Linearität ist allerdings häufig nur eine erste Approximation. Immerhin ist der Fall geschlossen lösbar durch Exponentialansatz, lineare Algebra und Integration. Denn man kann die Exponentialfunktion auch auf Matrizen anwenden! $e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} (\Lambda t)^k/k!$. Wenn man M diagonalisieren kann, mit einer Basis von Eigenvektoren, zerfällt das homogene Problem bezüglich dieser Eigenvektoren in n unabhängige LDGL 1. Ordnung!

Stromkris dus Spannungsquelle V(t), Ohmschem Widerstand R und Kapität C für die Ladung Q(t). Der Stromist I(t)=Q(t)

geschlossene Potentialschteite

$$\dot{Q}(t) + \frac{1}{RC}Q(t) = \frac{1}{R}V(t)$$

Die allgemeine Lösung anscwendet (Stadt = felt-to))

lui fert
$$Q(t) = Q(t_0) e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}}$$

$$+ \int_0^t dt' \frac{1}{R} V(t') e^{-\frac{1}{RC}(t-t')}$$

$$+ \int_0^t dt' \frac{1}{R} V(t') e^{-\frac{1}{RC}(t-t')}$$

Counc V exponentielles Abblirsen ?

(ponstantes V: Q(t) -> CV]

TAFEL 054

$$(\Rightarrow) \dot{X}_2 = -YX_1 + S$$

$$\dot{X}_1 = \dot{X}_2$$

$$(=)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{2} = -8x_{1} + 8 \Rightarrow (x_{1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1} \\ x_{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

XI.6 Stabilitätsanalyse für gDGL 1. Ordnung

- ► Eine autonome gDGL 1. Ordnung kann mit einer Funktion β dargestellt werden: $\dot{x} = \beta(x)$.
- Anhand des Vorzeichenwechsels von β kann man **Attraktoroder Repellor** Eigenschaften untersuchen.
- Nullstellen x_N von β sind stationäre Lösungen, denn $\dot{x}_N=0$.
- ▶ Wechselt das Vorzeichen von + nach −, so ist der stationäre Punkt ein stabiler Attraktor, denn kleinere Werte wachsen bis zu ihm an und größere Werte fallen auf ihn zu.
- ▶ Wechselt das Vorzeichen von − nach +, so ist der stationäre Punkt ein instabiler Repellor, denn kleinere Werte werden noch kleiner und größere Werte werden noch größer.
- ► Ohne Vorzeichenwechsel ist der stationäre Punkt einseitig attraktiv bzw. abstoßend.
- ▶ In der logistischen DFG, $\beta(x) = \gamma x(1 x/K)$ ist x = 0 repulsiv, x = K attraktiv.
- Im Mehrdimensionalen kann es sich in unterschiedlichen Richtungen auch unterschiedlich verhalten.