# Vorkurs Physik
# Mathematisches Rüstzeug

Dr. Martin Janßen (Lineare Algebra)
Prof. Dr. Markus Grüninger (Analysis)

9.-27. September 2024

# Oranisatorisches

- Für Studienanfänger: `https://physik.uni-koeln.de/studium/studium/infos-zum-studieneinstieg/programm-fuer-studienanfaengerinnen`
- Vorlesung: Ort: Hörsaal III, 11:00 - 12:30

  Janßen (Lineare Algebra), 9.-13.9. und 26./27.9. mit 6 Übungsblättern

  Grüninger (Analysis), 16./17. und 19./20. und 23.-25.9. mit 7 Übungsblättern

  Fachschaftstermine: Mi. 18.9.; Di/Mi. 1./2.10.

# Organisatorisches

- Übungen: Start: Di, 10.9. (13 Termine (nicht 18.9.))
  täglich 13:00-15:30 bzw. 15:00- 16:30 bzw. 16:00 -17:30

  Gruppeneinteilung und Räume: **Di 10.9. Treffen um 13:00 im Foyer** mit den Tutor*innen.
  Dabei etwa gleich große Gruppen bilden.
  Wechseln ist möglich bei Beachtung der Gruppengröße!
  **Übungsaufgaben** werden an einem Tag als pdf **online** auf unserer Webseite (s.u.) ausgegeben
  und am folgenden Sitzungstag (von Ihnen vorbereitet) gemeinsamin **in Teams** besprochen bzw. gelöst. Tutor*innen unterstützen.
- Webseite: ILIAS / selfassessment (Registrierung notwendig, Matrikelnummer nicht nötig)
  `https://www.selfassessment.uni-koeln.de/goto.php?target=crs_4429&client_id=uzk_selfea`

# Webseite

Zur Einstimmung folgende Fragen:

1. Wieso Mathematik in einem Vorkurs für Physik?
2. Was sind physikalische Begriffe und Beziehungen?
3. Was sind physikalische Größen?
4. Was verstehen Sie unter Mathematischer Modellierung?

Das wohl am besten verstandene mathematische Problem ist das Lösen von Linearen Gleichungssystemen (LGS). Oft versucht man, echte Probleme dahin zu modellieren.

**Literaturhinweise:** Sie finden in unserem Kurs auf der Webseite neben den Übungen und Material auch Literaturhinweise.
Einen ähnlichen Vorkurs der Uni Heidelberg inklusive weiterer Übungsaufgaben mit Lösungen finden Sie hier:
`https://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1`

# Inhaltsverzeichnis zur Linearen Algebra

# Physikalische Größen und Mathematisierung

I.1 Größen, Einheiten, Symbole

I.2 Aussagenlogik, Mengen und Abbildungen

I.3 Beispiele für Vektoren

# Größen, Einheiten, Symbole

Gesetzmäßigkeiten der Naturbeschreibung durch
**Begriffe und ihre Beziehungen**
Mathematisierung angelegt in Begriffen als
**physikalische Größen** wie z.B. Masse, Geschwindigkeit, Energie
mit **Zahlenwert · Maßeinheit**,`https://www.leifiphysik.de/tipps-und-tricks/allgemeines-und-hilfsmittel` z.B.
Masse $m = 1,5\,\mathrm{kg}$ (Zahlenwert 1,5 · Maßeinheit kg)

Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 300 \\ -200 \\ 10 \end{pmatrix} \mathrm{km/h}$
(Zahlenvektor ·Maßeinheit km/h)

Nur sinnvoll zu einer Basis von drei z.B. senkrechten Vektoren
Energie $E = 12\,\mathrm{kWh}$ (Zahlenwert 12 ·Maßeinheit kWh)
Maßeinheiten müssen umgerechnet werden auf gemeinsame Maßeinheiten bei Vergleich und Rechnungen, z.B.

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= 12\,\mathrm{kWh} + 6000\,\mathrm{kJ} = 12\,\mathrm{kJ/s} \cdot 3600\,\mathrm{s} + 6000\,\mathrm{kJ} \\ &= 4,92 \cdot 10^4\,\mathrm{kJ} \end{aligned}$$

# Größen, Einheiten, Symbole

Mathematische **Symbole/Zeichen** wie $+\,;\cdot\,;\vec{v}\,;(\vec{a}*\vec{b})\cdot\vec{c}\,;\pi$ für kompakte Darstellung von Strukturen; die gebräuchlichsten:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_mathematischer_Symbole`

Einige häufig vorkommende - nicht in der Schule üblich:
Das **Summenzeichen**:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i$$

steht für $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.
Sehr kompakt z.B. für den Mittelwert $\overline{X}$ aus $N$ Zahlen $X_1 \dots X_N$:

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Das **Produktzeichen** z.B. für Fakultäten

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j$$

steht für $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$.

# Aussagenlogik, Mengen und Abbildungen

Für **Beweise** Symbole der zweiwertigen (wahr=w; falsch=f)
**Aussagenlogik**
IMPLIKATION $\Rightarrow$ ; ÄQUIVALENZ $\Leftrightarrow$ ; UND $\wedge$ ; ODER $\vee$
NEGATION zu Aussage $A$: $\overline{A}$
Ihre Regeln werden durch **Wahrheitstabellen** definiert

| $A$ | $B$ | $\overline{A}$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w | f | f |
| f | w | w | f | w | w | f |
| f | f | w | f | f | w | w |

Beachten Sie: Bei $A \Rightarrow B$ ist $B$ nur ein Indiz für $A$ (notwendig für $A$, aber nicht hinreichend); $A$ ist hinreichend für $B$, aber nicht notwendig. Nur bei der Äquivalenz sind $A$ und $B$ logisch gleichwertig. $A \vee B$ ist nicht ausschließend gemeint.

# Aussagenlogik, Mengen und Abbildungen

Es gibt drei wesentliche Beweismethoden: (1) **direkter Beweis** durch Implikationen aus wahren Anfangsaussagen, z.B.

$$a = -3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{a^2} = 3$$

(2) **indirekter Beweis** durch Implikationen, die aus der Annahme, die Behauptung sei falsch, auf eine bekanntermaßen falsche Aussage führen, z.B.
$\sqrt{2}$ rational: Bruch in gekürzter Primzahlfaktorisierung von Zähler und Nenner $\Rightarrow \sqrt{2}^2 = 2$ enthält die Primfaktoren doppelt. Das ist falsch, da 2 keine doppelten Primfaktoren hat. Also, $\sqrt{2}$ nicht rational.
(3) Beweis durch **vollständige Induktion** für abzählbar viele Fälle: Für den ersten Fall zeigt man die Gültigkeit, dann zeigt man die Implikation: Aus jedem Vorgänger Fall folgt der Nachfolger Fall, z.B.

$$\sum_{j=1}^{N} j = \frac{(N+1)N}{2}$$

Für $N = 1$ ist es erfüllt, denn

$$\sum_{j=1}^{1} j = 1 = \frac{(1+1)1}{2}$$

Nun sei es für $N$ wahr, folgere daraus, was für $N+1$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{N+1} j = \sum_{j=1}^{N} j + (N+1) =$$

$$\frac{(N+1)N}{2} + (N+1) = N^2/2 + 3N/2 + 1 = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$$

Damit ist es auch für $N+1$ wahr, wenn es für $N$ gilt.

# Aussagenlogik, Mengen und Abbildungen

Mathematik als Strukturwissenschaft verwendet **Mengen** $M$ und **Abbildungen** $A : D \to Z$, die jedem Element $x$ aus $D$ (Definitionsmenge) genau ein Element $y = A(x)$ aus $Z$ (Zielmenge) zuordnet. Die Menge aller Werte von A, $A(M) = W$ ist die Wertemenge, eine Teilmenge von $Z$.

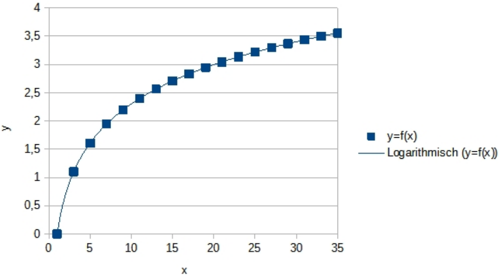
$$\forall x \in D; x \mapsto y = A(x) \in Z \; ; \; A(D) \subseteq Z$$

Ist $Z$ eine Zahlenmenge spricht man auch von **Funktionen** $f : D \to Z$.
Mengen aus unterscheidbaren **Elementen** gebildet durch Auflistung oder Eigenschaftsaussagen.
Abbildungen/Funktionen dargestellt durch $(x, y)$ Tabellen, $x - y$ Graphen und/oder durch Terme wie $y = f(x) = x^2 + \sin(x)$.

# Aussagenlogik, Mengen und Abbildungen

Beispiel für Mengen und Funktionen: $D := \{n \in \mathbb{N} \mid n/2 \notin \mathbb{N}\}$ (ungerade natürliche Zahlen); $Z = \mathbb{R}$ und Funktionsterm $f(x) = \ln(x)$. Eine Tabelle und ein Graph stellen immer nur einen Teil bei unendlich vielen Elementen in $D$ dar. Der Funktionsterm ist allgemeiner.

| x | y=f(x) |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 3 | 1,0986122887 |
| 5 | 1,6094379124 |
| 7 | 1,9459101491 |
| 9 | 2,1972245773 |
| 11 | 2,3978952728 |
| 13 | 2,5649493575 |
| 15 | 2,7080502011 |
| 17 | 2,8332133441 |
| 19 | 2,9444389792 |
| 21 | 3,0445224377 |
| 23 | 3,1354942159 |
| 25 | 3,2188758249 |
| 27 | 3,295836866 |
| 29 | 3,36729583 |
| 31 | 3,4339872045 |
| 33 | 3,4965075615 |
| 35 | 3,5553480615 |




Der Funktionsterm $ln(x)$ gibt Anlass dazu, die Definitionsmenge zu erweitern, z.B. auf das kontinuierliche Intervall $D' := [1; \infty[$, da er auf alle Zwischenwerte angewendet werden kann und ohne Lücken die Punkte des Graphen zu einer stetigen Kurve erweitert.

# Beispiele für Vektoren

**Vektorräume** sind eine algebraische Struktur für **parallel verarbeitbare** Problemlösungen `https://de.wikipedia.org/wiki/Vektorraum`. Ihre Elemente heißen Vektoren. Vektoren lassen sich durch Listen von Zahlen darstellen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

mit denen man für jede Komponente $v_k$ der Liste auf gleiche (parallele) Weise rechnen kann.
(1) $\vec{v}$ könnte einen **Lagerbestand** an Stückzahlen (negative Zahl $=$ fehlend) mit 4 unterscheidbaren Produkten beschreiben. Ein- und Ausgänge führen zur komponentenweisen Addition. Wichtungen mit Preislisten $\vec{p}$ führen zu einem Gesamtwert des Lagers durch ein Skalarprodukt $\vec{v} * \vec{p}$.

# Beispiele für Vektoren

(2) $\vec{v}$ mit nur drei Komponenten könnte eine **Verschiebung** zwischen zwei Punkten im Raum beschreiben, wobei ein kartesisches Korrdinatensystem verwendet wurde. Das haben Sie in der Schule in **Analytischer Geometrie** gelernt und wir wiederholen das mit Erläuterung der Begriffe **Basis und lineare Unabhängigkeit**.

(3) $\vec{v}$ mit nur drei Komponenten könnte eine **physikalische Größe** sein wie Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft oder elektrisches Feld, die **im Raum an jeder Stelle** durch eine **Stärke und eine Richtung** charakterisiert sind. Auch dazu muss ein (kartesisches) Koordinatensystem festgelegt worden sein (möglicherweise punktweise).

(4) $\vec{v}$ könnte einen **Zustand** als Liste von Werten zu 4 unterscheidbaren Eigenschaften irgendeines veränderlichen Systems beschreiben.

# Beispiele für Vektoren

Bei (1) und (4) steht die **zeitliche Veränderung** der Vektoren im Fokus (Dynamik), die durch lineare Abbildungen, dargestellt durch **Matrizen**, beschrieben werden. Das wird in der Schule nur noch selten (z.B. bei stochastischen Prozessen) behandelt, taucht aber in der Physik z.B. in der Quantenmechanik verstärkt auf.

Bei (2) und (3) stehen die **rechnerischen Verknüpfungen** wie **Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation und Kreuzprodukt** im Fokus, was auch der Schwerpunkt in der Schule und in der klassischen Physik (Mechanik, Elektrodynamik als Vektorfeldtheorie) ist.

# Vektoren und ihre Linearkombinationen: Vektorketten

II.1 Verschiebungsvektoren und Vektoraddition

II.2 Stauchen, Strecken, Spiegeln: Skalare Multiplikation

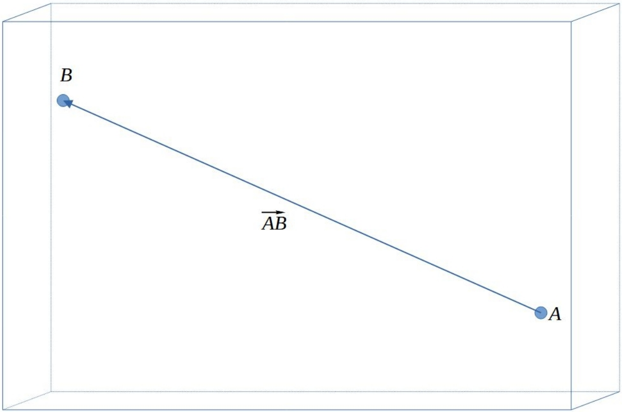
II.3 Linearkombinationen zu Vektorketten und Lineare Unabhängigkeit

II.4 Basisvektoren und Spaltendarstellung

# Verschiebungsvektoren und Vektoraddition

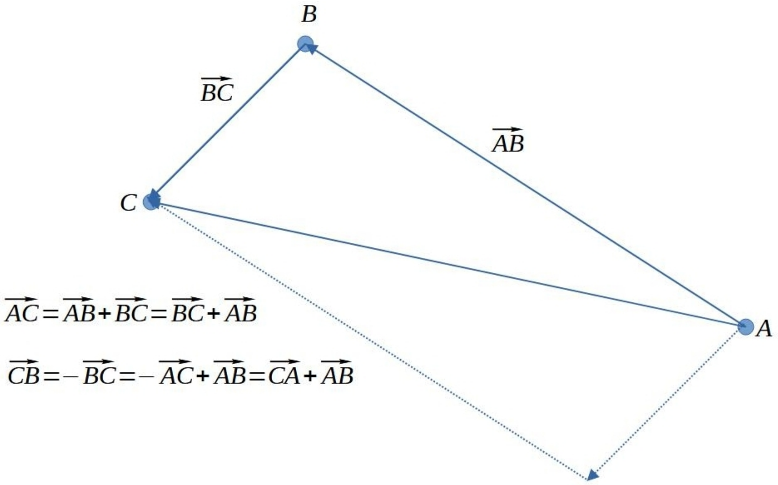
In der analytischen Geometrie des 3d Raumes werden Vektoren als **Verschiebungen zwischen zwei Punkten** definiert, die als Pfeile gedeutet werden. Der Schaft startet beim Punkt, von dem aus verschoben wird und die Spitze zeigt auf den Punkt, wohin verschoben wird.

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$



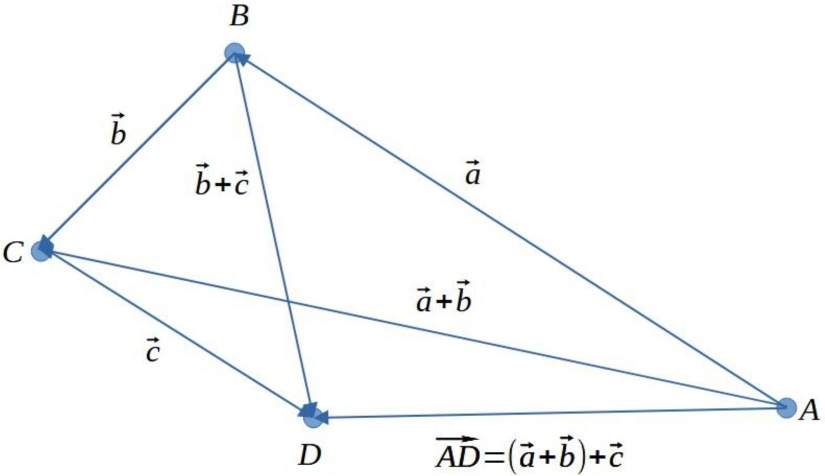
# Verschiebungsvektoren und Vektoraddition

Hintereinanderausführung "Schaft an Spitze" definiert die Vektoraddition. Nach Konstruktion: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; Gegenvektor $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$; Nullvektor $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$



# Verschiebungsvektoren und Vektoraddition

**Assoziativität der Vektoraddition**



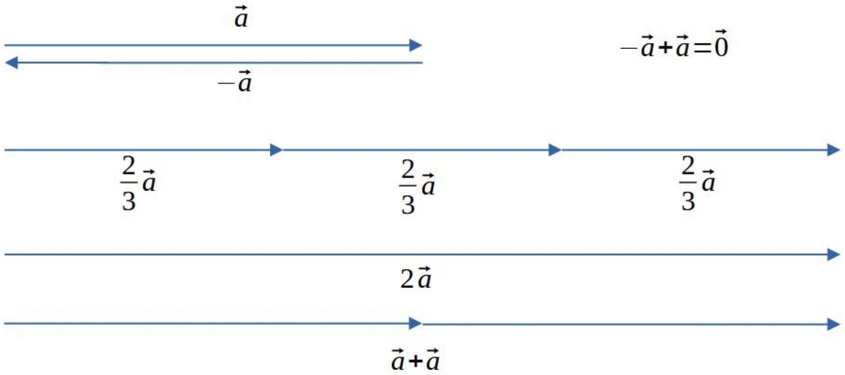

$$\overrightarrow{AD}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

# Verschiebungsvektoren und Vektoraddition

Aus den Beziehungen in den Bildern, die für beliebige Punkte $A, B, C, D$ und ihre Verschiebungsvektoren gelten, schließen wir, dass die Verschiebungsvektoren mit der Addition eine kommutative (abelsche) Gruppe bilden, d.h. es gilt:
(**Assoziativität**) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
(**Existenz eines Neutralen Elements**) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
(**Existenz eines Inversen Elements zu jedem Element**)
$-\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$.
(**Kommutativität**) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
Das legt die Rechenregeln der Vektoraddition und damit die Struktur hinsichtlich der Hintereinanderausführung von Verschiebungen fest.
Diese vier $(V, +)$-Regeln sind für alle Vektorräume definierend.

# Strecken, Stauchen, Spiegeln: Skalare Multiplikation




$$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{a}=2\vec{a}=\vec{a}+\vec{a}$$

# Strecken, Stauchen, Spiegeln: Skalare Multiplikation

Das Multiplizieren eines Vektors mit einer reelen Zahl $\lambda$ wird als Stauchen $(0 < \lambda < 1)$, Strecken $(\lambda > 1)$ oder als Streck-Stauch-Spiegeln $(\lambda < 0)$ eingeführt. Für eine rationale Zahl[1] $\lambda = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ definieren wir $\lambda \cdot \vec{a}$ implizit durch die Forderung aus der Abbildung vorher:

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{p}{q} \cdot \vec{a} = \sum_{l=1}^{p} \vec{a}\,. \quad (*)$$

Die Multiplikation mit $-1$ wird als Spiegelung, d.h. als Gegenvektor eingeführt.

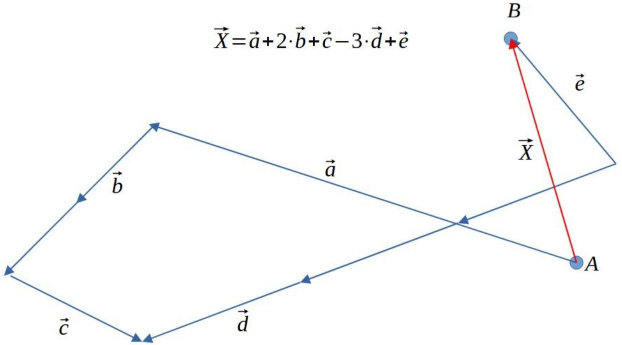
$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

Die Multiplikation soll assoziativ sein: $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$ und es soll keinen Unterschied machen, ob wir die Zahl vor den Vektor oder den Vektor vor die Zahl schreiben, $\vec{a} \cdot \lambda := \lambda \cdot \vec{a}$.

[1] Jede reelle Zahl lässt sich beliebig genau durch eine rationale Zahl approximieren.

# Strecken, Stauchen, Spiegeln: Skalare Multiplikation

Aus dem Obigen folgen die Regeln die zusätzlich zu $(V, +)$ einen Vektorraum $(V, +, \cdot)$ festlegen:
**(Linearität 1)** $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
**(Linearität 2)** $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$
**(Existenz eines neutralen Elements)** $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
**(Assoziativität)** $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
Damit sind Vektoren durch Vektorketten als **Linearkombinationen** aus geeigneten Vektoren beschreibbar.

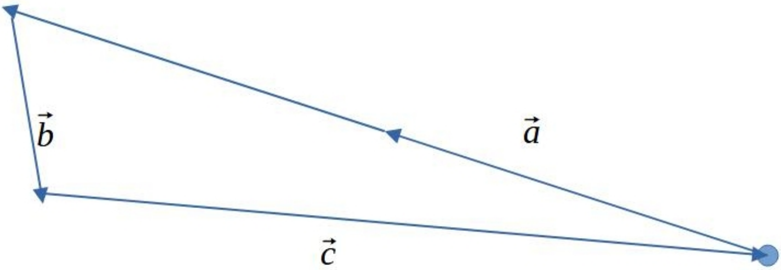


# Lineare Unabhängigkeit

Von Bedeutung ist, wie man eine Vektorkette zu $\vec{X} = 0$ aufstellen kann und wie viele Vektoren (die nicht $\vec{0}$ sind) man dazu benötigt.

$$\vec{X} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$\vec{c} = -(2 \cdot \vec{a} + \vec{b})$ ist linear abhängig von $\vec{a}, \vec{b}$




$t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{0}$ ist nur möglich mit $t = s = 0$

$\vec{a}, \vec{b}$ sind linear unabhängig

# Lineare Unabhängigkeit

Man definiert dann: $N$ Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N$ heißen linear unabhängig, wenn jede aus ihr gebildete Vektorkette nicht wieder bis zum Ausgangspunkt reicht, formal:

$$\left[\forall \{\lambda_k\}_{k=1,\dots,N} \text{ mit } \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}\right] \Rightarrow \lambda_k = 0\,.$$

Zwei linear abhängige Vektoren sind Vielfache voneinander, also **parallel**. Es gilt ein nicht ganz leicht zu beweisender aber sehr einleuchtender Satz: Es gibt in einem Vektorraum immer eine maximale Zahl $D$ von $N = D$ linear unabhängigen Vektoren. $D$ ist die **Dimension** des Vektorraumes; im Falle unseres Anschauungsraumes mit Punkten und Verschiebungspfeilen ist $D = 3$.

# Basis und Spaltendarstellung

Es ist dann leicht zu zeigen, dass man jeden Vektor $\vec{v}$ des Vektorraumes als Linearkombination von $D$ linear unabhänigen Vektoren $\{\vec{a}_k\}_{k=1,\ldots,D}$ darstellen kann:

$$\exists\, \{v_k\}_{k=1,\ldots,D} \ \mathrm{mit}\, \vec{v} = \sum_{k=1}^{D} v_k \cdot \vec{a}_k \,.$$

Speziell im 3d Anschauungsraum gilt

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{a}_1 + v_2 \cdot \vec{a}_2 + v_3 \cdot \vec{a}_3 \,.$$

Die Zahlen $\{v_k\}_{k=1,2,3}$ in einer Spalte angeordnet repräsentieren dann den Vektor $\vec{v}$ in der **Basis** $\mathrm{B} = \{\vec{a}_k\}_{k=1,2,3}$,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{\mathrm{B}}$$

und heißen **Komponenten** oder Koordinaten des Vektors $\vec{v}$ in der Basis $\mathrm{B}$.

# Basis und Spaltendarstellung

Die Rechenregeln, die für Addition und skalare Multiplikation bei fest gewählter Basis aus den Regeln $(V, +, \cdot)$ folgen, sind genau diejenigen, die Sie aus der Schule kennen. Alles geschieht komponentenweise gleich:

$$s\vec{v} + t \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} sv_1 + tw_1 \\ sv_2 + tw_2 \\ sv_3 + tw_3 \end{pmatrix}_{\mathrm{B}} .$$

In der Schreibweise mit Summenzeichen und Indizes und Ausschreiben der Basisvektoren liest sich der gleiche Sachverhalt so

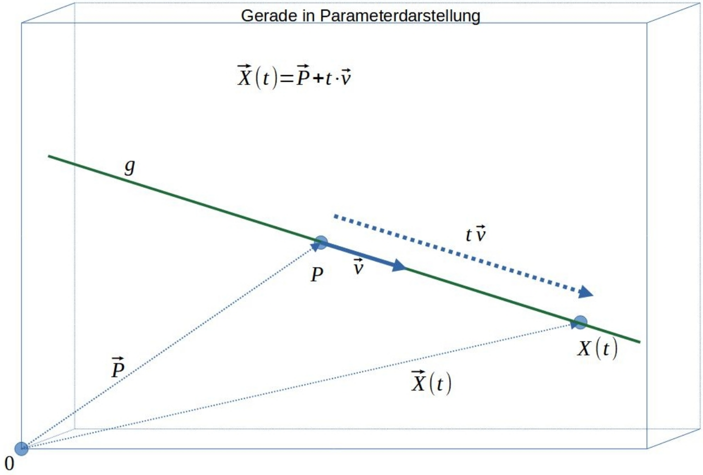
$$s\vec{v} + t \cdot \vec{w} = \sum_{k=1}^{3} (sv_k + tw_k)\vec{a}_k \, ,$$

wobei wir wie oft üblich das Multiplikationszeichen $\cdot$ zwischen Zahlen und Buchstaben bzw. zwischen Buchstaben weggelassen haben.

# Parameterdarstellung und LGS

# Parameterdarstellungen von Geraden und Ebenen

Geraden $g$ sind durch eine Funktion von Punkten $X(t)$ darstellbar. Für jeden Wert des einen **Parameters** $t \in \mathbb{R}$ ergibt sich ein Punkt der Geraden. Bezogen auf einen **Ursprungsort** $0$ lässt sich das als **Aufpunktvektor** $\vec{P} + t\cdot$ **Richtungsvektor** $\vec{v}$ beschreiben:



# Paramterdarstellung von Geraden und Ebenen

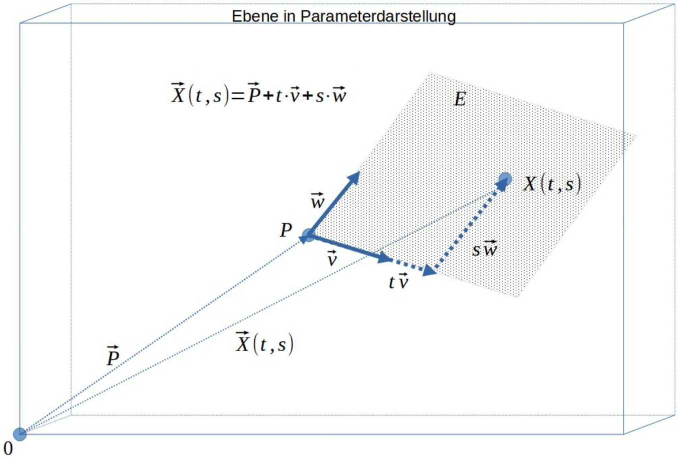
Mit der Wahl eines Ursprungsortes $0$ und der Wahl einer Basis $\mathrm{B}$ legt man im Raum ein **Koordinatensystem** fest. In Koordinaten lautet dann eine Parameterdastellung einer Geraden $g$ z.B. so:

$$g: \quad \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wenn wir den Richtungsvektor als Richtungsvektor eines startenden Flugzeuges interpretieren mit der $1$-Achse in Nord-Süd-Richtung und der $2$-Achse in West-Ost-Richtung und der $3$-Achse senkrecht zur Erdoberfläche und der Einheit 100 km für Längen und der Einheit Stunden für die Zeit $t \geq 0$, so fliegt das Flugzeug mit 300 km pro Stunde steigend in südwestlicher Richtung. Seine Geschwindigkeit beträgt (hier greifen wir auf Ihr Schulwissen zurück bzw. greifen vor) $\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} \cdot 100$ km/h $\approx 332$ km/h.

# Paramterdarstellung von Geraden und Ebenen

Ebenen $E$ sind durch eine Funktion von Punkten $X(t, s)$ darstellbar. Für jeden Wert der beiden Parameter $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich ein Punkt der Ebene. Bezogen auf einen Ursprungsort $0$ als **Stützvektor** $\vec{P} + t\cdot$ **Spannvektor** $\vec{v} + s\cdot$**Spannvektor** $\vec{w}$ beschrieben:



# Paramterdarstellung von Geraden und Ebenen

In Koordinaten lautet dann eine Parameterdarstellung einer Ebene $E$ z.B. so:

$$E: \quad \vec{X}(t,s) = \begin{pmatrix} 20 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit einer Längeneinheit von 100 m könnte im bereits gewählten Koordiantensystem damit idealisiert eine dreieckige Bergoberfläche beschrieben werden, die vom Ursprung 2 km nach Süden und 400 m nach Westen beginnt, die von dort nach Westen und Norden jeweils mit 10 Prozent ansteigt und eine maximale Höhe von 1000 m erreicht, wenn man $s, t$ jeweils auf das Intervall $[0; 5]$ beschränkt.

# Lagebeziehungen und LGS

Naheliegend sind nun solche Fragen wie: Liegt ein Punkt $Q$ auf der Geraden $g$? Schneiden sich zwei Geraden $g$ und $h$? Liegt die Gerade $g$ parallel zur Ebene $E$? Wie lautet die Schnittkante zweier Ebenen $E$ und $F$? Diese Fragen werden als Untersuchungen zu Lagebeziehungen linearer Objekte in der Analytischen Geometrie behandelt. Das Mittel der Wahl ist das komponentenweise **Gleichsetzen** der durch Vektordarstellungen gegebenen Objekte. Es entsteht dabei immer ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) aus drei linearen Gleichungen mit $1$ bis $4$ unbekannten Parametern. Durch die immer mögliche Bestimmung der Lösungsmenge des LGS erhält man die größtmögliche Auskunft zu **gemeinsamen Punkten** der Objekte. Gegebenenfalls muss man zuvor oder nachträglich noch Parallelität von Geraden (die Richtungsvektoren müssen dann Vielfache voneinander sein) prüfen, falls sie keine gemeinsamen Punkte haben. Das ist ein besonders einfaches LGS aus drei Gleichungen mit nur einer Unbekannten.

# Lagebeziehungen und LGS

Als Beispiel stellen wir uns die Frage, ob das Flugzeug von vorher auf den Berg von vorher treffen würde, wenn es seinen Kurs beibehält. Dazu setzen wir $\vec{X}(t)$ von $g$ und $\vec{X}(r,s)$ von $E$ komponentenweise gleich. Den ersten Parameter von $E$ haben wir zu $r$ umbenannt, um ihn unabhängig vom Parameter $t$ von $g$ zu halten:

$$\begin{aligned} 2+t &= 20+0r-10s \\ -1-t &= -4-10r+0s \\ 0+3t &= 0+r+s \end{aligned}$$

Das sortieren wir so um, dass auf der linken Seite die drei Variablen in der Reihenfolge $r, s, t$ auftreten und auf der rechten Seite Zahlen (Faktor $1$) ohne Variablen. Dann ist das LGS durch eine Matrix eindeutig dargestellt, deren Spalten den Variablen von links nach rechts als $r, s, t, 1$ entsprechen. Erlaubte - die Lösungsmenge nicht verändernde - **Transformationen** sind die Multiplikation der gesamten Zeilen mit Zahlen $(\neq 0)$ und Additionen/Subtraktionen von Zeilen.

# Lagebeziehungen und LGS

Man wählt die Transformationen so, dass man sukzessive $0$ in die Matrix bekommt, bis diese in einer **Dreiecksform** ist, oder noch besser, in einer **Diagonalgestalt**, an der man die Lösungsmenge ablesen kann. Dieses Vorgehen **Gauss-Algorithmus** kennen Sie aus der Schule. Es ist äußerst robust und auf beliebig große LGS anwendbar. Natürlich auch mit Unterstützung durch elektronische Rechner. Im Internet kann man z.B. online RREF aufrufen. Für die Eingabe mit Spaltenreihung $r, s, t, 1$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -1 & -18 \\ -10 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

lautet die Ausgabe-Matrix

$$\text{Rref}\, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 1 & 0 & 1,75 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} \; r = -0,25;\; s = 1,75;\; t = 0,5.$$

Also keine Kollision, da der gemeinsame Punkt außerhalb der Dreiecksfläche liegt.

# Lösungsmethoden des LGS

Neben **rechnergestützten Methoden**, die z.B. bei vielen Nulleinträgen optimierte Algorithmen anbieten, gibt es im Studienverlauf noch die allgemeine **Cramersche Regel**, die selten händisch verwendet wird. Händisch geeignet ist das Gauss-Verfahren, für das hier zwei Beispiele angegeben sind.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc|c} s & t & 1 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & -2 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \\ \phantom{0} \end{array} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$-8t = 2 \rightarrow t = -1/4$$

$$3s + 1/4 = 4 \rightarrow s = 5/4$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc|c} s & t & 1 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \\ \phantom{0} \end{array} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

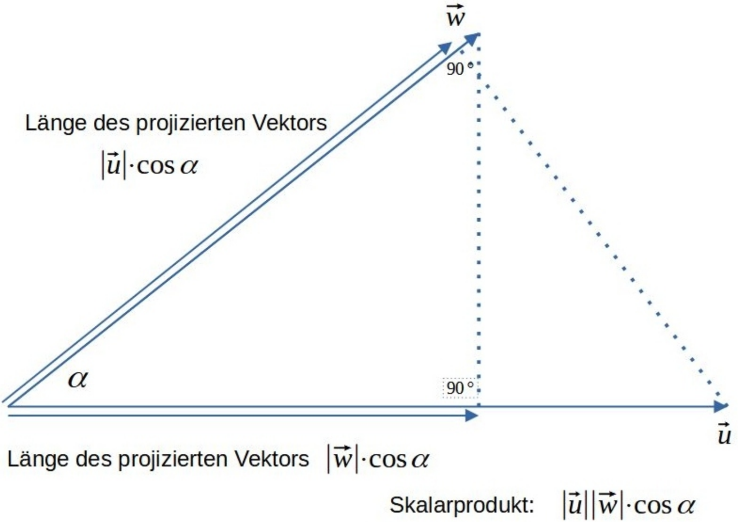
$$0s + 0t = 4 \ ⚡$$

Keine Lösung

# Messen mit dem Skalarprodukt und dem Kreuzprodukt

# Längen und Winkel mit dem Skalarprodukt

Längen $|\vec{u}|, |\vec{w}|$ und Winkel $\alpha$ zwischen zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ sind im **Skalarprodukt** gespeichert. Das ist eine Zahl (Skalar), die durch senkrechte Projektion gebildet wird.



# Längen und Winkel mit dem Skalarprodukt

Die Definition lautet dazu:

$$\vec{u} * \vec{v} := |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\alpha\,.$$

Als Schreibweisen findet man auch andere Multiplikationszeichen oder Klammern, z.B. $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$ ; $(\vec{u}; \vec{v})$. Um Eindeutigkeit und Symmetrie bezüglich der beiden Vektoren zu gewährleisten, wird der Winkel im Gradmaß auf $\alpha \in [0; 180°]$ bzw. im Bogenmaß auf $\alpha \in [0; \pi]$ beschränkt. Die wichtigen geometrischen Eigenschaften, die man aus der Definition ablesen kann sind:
Die **Länge** eines Vektors ist gegeben als $v := |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} * \vec{v}}$.
Zwei endlich lange Vektoren stehen genau dann **senkrecht** aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet (Sie haben keinen Projektionsanteil aneinander): $\vec{v} * \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$.
Für zwei **parallele** Vektoren ($\alpha = 0, \pi$) gilt: $\vec{v} * \vec{w} = \pm vw$.
Da $\cos\alpha$ betraglich immer in $[0, 1]$ liegt, gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung** $|\vec{v} * \vec{w}| \leq vw$.

# Längen und Winkel mit dem Skalarprodukt

Die folgenden ableitbaren Eigenschaften kann man umgekehrt als **axiomatische** Struktureigenschaften eines Skalarproduktes definieren und Längen und Winkel daraus dann als abgeleitet betrachten.

(**Symmetrie**) $\vec{v} * \vec{w} = \vec{w} * \vec{v}$.

(**Bilinearität**) $(s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2) * (r\vec{w}_1 + u\vec{w}_2) = sr(\vec{v}_1 * \vec{w}_1) + tr(\vec{v}_2 * \vec{w}_1) + su(\vec{v}_1 * \vec{w}_2) + tu(\vec{v}_2 * \vec{w}_2)$.

(**positive Definitheit**) $\vec{v} * \vec{v} \geq 0;\ \vec{v} * \vec{v} = 0 \ \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

Ein Raum aus Punkten, zwischen denen man mit Vektoren eines Vektorraumes zueinander verschieben und Längen und Winkel überall gleich bestimmen kann, heißt **Euklidischer Raum**. Als **kartesisches Koordinatensystem** bezeichnet man neben der Wahl des Ursprungs die Wahl einer **Orthonormalbasis** (ONB) $\mathrm{E} = \{\vec{e}_k\}_{k=1,\ldots,D}$, mit der definierenden Eigenschaft:

$$\vec{e}_k * \vec{e}_j = \delta_{kj}\,. \ \ (\mathrm{OR})$$

Hierbei steht das **Kronecker-Symbol** $\delta_{kj}$ abkürzend für die beiden Möglichkeiten $\delta_{kj} = 0$, falls $k \neq j$, oder $\delta_{kj} = 1$, falls $k = j$.

# Längen und Winkel mit dem Skalarprodukt

Bei einer ONB stehen die Basisvektoren paarweise aufeinander senkrecht und haben die Länge $1$ (**Einheitsvektoren**). Aus einem beliebigen Vektor macht man einen Einheitsvektor so: $\vec{\hat{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Dann ist $\left|\vec{\hat{a}}\right| = 1$. Aus zwei beliebigen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ kann man zwei othogonale bilden, indem man einen wählt, den auf diesen projizierten Anteil des anderen abzieht (Schmidt-Verfahren)

$$\vec{b'} = \vec{b} - \frac{\vec{a} * \vec{b}}{a^2}\vec{a} \ \Rightarrow \vec{a} * \vec{b'} = 0\,.$$

Wie wir in $D = 3$ dann einen dritten auf beiden senkrechten Vektor konstruieren, lernen wir im nächsten Abschnitt. Mit Darstellung von Vektoren in einer ONB $\vec{v} = \sum_{k=1}^{3} v_k \vec{e}_k$ kann man wegen der Orthogonalrelation (OR) leicht zeigen, dass das Skalarprodukt dann die aus der Schule vertraute Form hat,

$$\vec{v} * \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3\,.$$

In einer nicht-orthonormierten Basis treten gemischte Terme (wie $v_1 w_2 \vec{a}_1 * \vec{a}_2$) auf und Faktoren $\vec{a}_i * \vec{a}_i$.

# Längen und Winkel mit dem Skalarprodukt

Als Anwendungsbeispiel des Skalarproduktes weisen wir darauf hin, dass die physikalische Größe der **Arbeit** an einem Körper die **momentane Leistung als Skalarprodukt zwischen der Kraft auf einen Körper und seiner momentanen Geschwindigkeit** heranzieht und diese über die Zeitdauer aufsummiert (integriert). Das lernen Sie genauer im Studium.

Eine Anwendung aus der analytischen Geometrie ist die Bestimmung des kürzesten (=senkrechten) Abstandes eines Punktes $P$ von einer Geraden $g$. Wir projizieren den Verschiebungsvektor $\overrightarrow{AP}$ vom Aufpunkt $A$ zum Punkt $P$ der Geraden $g$ in Richtung des normierten Richtungsvektors $\vec{v}$. Dort erreichen wir den Punkt $Q$ auf der Geraden,

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AP} * \vec{v}}{v^2}\vec{v},$$

dessen Verschiebungsvektor zu $P$ senkrecht auf der Geraden $g$ steht. Die Länge von $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ ist dann der gesuchte Abstand. Details als Übung.

# Orthogonale Vektoren in 3d mit dem Kreuzprodukt

Ein senkrechter Vektor zu einer Ebene muss auf beiden Spannvektoren senkrecht stehen, d.h. mit beiden das Skalarprodukt Null haben. Das sind zwei Gleichungen für 3 Komponenten in einer Basis. Damit ist die Länge des senkrechten Vektors frei wählbar, aber auch seine **Orientierung**, weil das Vorzeichen bei fester Länge auch getauscht werden kann. Wir definieren daher ein **Vektorprodukt** (Kreuzprodukt) als **Produkt zweier Vektoren** so, dass es einen **neuen Vektor ergibt, der auf beiden senkrecht steht** mit einer festen Länge und einer festen Orientierung, die sich umdrehen soll, wenn wir die Reihenfolge wechseln (antikommutativ),

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v} \ \ (\mathrm{AK})\,; \Rightarrow \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}\,.$$

Weiterhin soll es **bilinear** sein, d.h. für Vektorketten zerlegt werden können

$$\begin{aligned}(s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2) \times (r\vec{w}_1 + u\vec{w}_2) &= sr(\vec{v}_1 \times \vec{w}_1) + su(\vec{v}_1 \times \vec{w}_2) \\ &+ tr(\vec{v}_2 \times \vec{w}_1) + tu(\vec{v}_2 \times \vec{w}_2)\,.\end{aligned}$$

# Orthogonale Vektoren in 3d mit dem Kreuzprodukt

Dann reicht es, wenn wir das Vektorprodukt für eine ONB $\{\vec{e}_k\}_{k=1,2,3}$ definieren. Die Reihenfolge $1, 2, 3$ legen wir als **Rechts-System** (Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand gespreizt) fest,

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \; ; \; \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \; ; \; \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

Alle anderen Paarungen ergeben sich durch die (AK)-Eigenschaft. Das lässt sich kompakt schreiben mit dem **Levi-Civita-Symbol** $\epsilon_{ijk}$ schreiben,

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j := \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \, ,$$

das unter Vertauschung zweier Indizes das Vorzeichen wechselt und wie folgt definiert ist:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \, ; \forall (ijk) : \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$$

Insbesondere verschwindet es, sobald zwei Indizes gleich sind.

# Orthogonale Vektoren in 3d mit dem Kreuzprodukt

Damit lässt sich das Kreuzprodukt zweier beliebiger Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ in Komponenten einer ONB bilden und es lautet komponentenweise (Beweis zur Übung)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} .$$

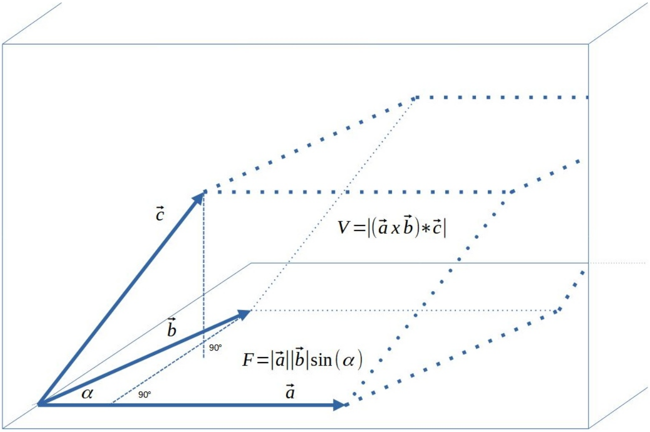
Der Betrag des Vektorproduktes ist basisunabhängig und um ihn zu ermitteln, wählen wir die Basis so, dass $\vec{u}$ in $1$-Richtung zeigt und $\vec{v}$ in der 1-2-Ebene liegt. Mit dieser Wahl ist $(\vec{u} \times \vec{v})_1 = 0 = (\vec{u} \times \vec{v})_2$ (senkrechter Vektor) und die Länge der Betrag von $(\vec{u} \times \vec{v})_3 = u_1 v_2$, was dem Flächeninhalt des Parallelogramms entspricht, das von beiden Vektoren gebildet wird,

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{v}| \, |\vec{v}| \sin \alpha \,,$$

wobei $\alpha \in [0; \pi]$ der Winkel zwischen den Vektoren ist.

# Maße im 3d Raum mit dem Kreuz- und dem Spatprodukt

In der folgenden Abbildung sieht man: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ ergibt den **Flächeninhalt** des zugehörigen Parallelogramms und durch das Skalarprodukt des resultierenden Vektors mit einem dritten Vektor $\vec{c}$ ergibt sich das Volumen des Parallelepipeds (Spat genannt) zu diesen drei Vektoren. $(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}$ heißt **Spatprodukt** .



# Maße mit der Determinante

V.1 Determinante als orientiertes $D$-dim. Volumen

V.2 Eigenschaften der Determinante

# Determinante als orientiertes $D$-dim. Volumen

Wenn man die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}.\vec{c}$ in kartesischen Koordinaten als Spalten in der Reihenfolge von links nach rechts anordnet, ergibt sich eine $3 \times 3$ quadratische Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Das von ihnen aufgespannte orientierte Spatvolumen ergibt sich nach dem Vorherigen zu

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} &= a_1(b_2c_3 - b_3c_3) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1\,. \end{aligned}$$

Bilden die drei Vektoren ein Rechtssystem ist das **orientierte Volumen** positiv, andernfalls negativ. Bei linear abhängigen Vektoren verschwindet es.

# Determinante als orientiertes $D$-dim. Volumen

Ausgedrückt durch die Matrixelemente $m_{kl}$, ( $k$, $l$ für die Zeilen- , Spaltennummer) wird das orientierte Volumen der Spaltenvektoren als **Determinante der Matrix** $M$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}\det(M) :&= m_{11}m_{22}m_{33} + m_{21}m_{32}m_{13} + m_{31}m_{12}m_{23} \\ &- m_{11}m_{32}m_{23} - m_{21}m_{12}m_{33} - m_{31}m_{22}m_{13} \,.\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols lässt sich das kompakt schreiben als (**Leibniz-Formel**)

$$\det(M) = \sum_{i=1,j=1,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \cdot m_{1i}m_{2j}m_{3k} \,.$$

Auch für $D = 2$ kann man die orientierte Fläche des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelogramms analog darstellen,

$$\det(M) = \sum_{i=1,j=1,}^{2} \epsilon_{ij} \cdot m_{1i}m_{2j} = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \,,$$

wobei das $d = 2$ Levi-Civita-Symbol analog definiert ist ($\pm 1$ für $12$ bzw. $21$ , $0$ sonst).

# Determinante als orientiertes $D$-dim. Volumen

Auch für $D = 1$ geht das als orientierte Länge durch:

$$\det(M) = m_{11}\,,$$

Die Vorschrift mit einem verallgemeinertem Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_D}$ ($\pm 1$ für $123\ldots D$ und alle mit grader bzw. ungerader Anzahl an Vertauschungen zweier Stellen erreichten Reihenfolgen und $0$ bei mehrfach vorkommenden Ziffern in der Reihenfolge, $\epsilon_1 = 1$ in $D = 1$) erlaubt die Definition einer Determinante für $D \times D$ symmetrische Matrizen und misst ihr orientiertes Spaltenvektorvolumen. Das erweist sich als sehr nützlich für die mehrdimensionale Inegrationstheorie, die Sie im Studium kennen lernen.
Im Rahmen der linearen Algebra ist das **Verschwinden der Determinante ein sicherer Hinweis auf lineare Abhängigkeit** von $D$ (nicht-verschwindenden) Spaltenvektoren. Mit ihrer Hilfe kann eine explizite Formel (Cramersche-Regel) für die Lösung eines LGS angegeben werden.

# Eigenschaften der Determinante

Aus der Leibniz-Formel bzw. aus der Bedeutung als orientiertes Volumen lassen sich einige Eigenschaften der Determinante als **alternierende Multilinerform** ableiten, die umgekehrt auch für eine axiomatische Charakterisierung herhalten können.
(Multilinearität 1) $\forall j \in \{1, \ldots, D\} : \det\left(\vec{a}_1 \ldots s \cdot \vec{a}_j \ldots \vec{a}_D\right) = s \cdot \det\left((\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_j \ldots \vec{a}_D\right)$.
(Multilinearität 2) $\forall j \in \{1, \ldots, D\} : \det\left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_j + \vec{b} \ldots \vec{a}_D\right) = \det\left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_j \ldots \vec{a}_D\right) + \det\left(\vec{a}_1 \ldots \vec{b} \ldots \vec{a}_D\right)$.
(Alternierend) $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, D\}^2 : \det\left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_j \ldots \vec{a}_D\right) = -\det\left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_j \ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_D\right)$.
Für $D = 1, 2, 3$ leicht nachzuvollziehen ist der im allgemeinen $D$ gültige **Determinanten-Entwicklungssatz** von Laplace:
$\det\left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_D\right) = \sum_{k=1}^{D} (-1)^{1+k} a_{k1} \cdot \det(A_{k1})$, wobei $A_{k1}$ eine $(D-1) \times (D-1)$ symmetrische Matrix ist, die durch Streichen der $k$-ten Zeile und $1$-ten Spalte entstanden ist.

# Eigenschaften der Determinante

Spalten kann man unter Beachtung des Alternierens durchtauschen und daher die Determinante bezüglich jeder Spalte entwickeln. Das Verfahren kann man iterieren, bis man bei $D = 1$ landet und die Leibniz-Formel zurückgewinnt. Ein großer Vorteil der Laplace-Regel wird ersichtlich, wenn viele Matrixelemente Null sind. So ergibt sich z.B., dass Matrizen von **Dreiecksgestalt** als Determinante einfach das **Produkt der Diagonalelemente** haben. Die Bevorzugung von Spalten gegenüber Zeilen kann man auch aufgeben, da die Leibniz-Formel zeigt, dass die Determinante der **transponierten** Matrix $M^{\mathrm{T}}$, $m_{ij}^{\mathrm{T}} := m_{ji}$, bei der Zeilen und Spalten vertauscht wurden, unverändert bleibt: $\det M^{\mathrm{T}} = \det M$. Eine Determinante ändert nach den Regeln der alternierenden Multilinearität (Übung) auch dann nicht ihren Wert, wenn man zu einer Spalte (oder Reihe) das Vielfache einer anderen Spalte (oder Reihe) hinzuaddiert. Anders formuliert: Das Volumen ändert sich nicht durch Addition eines wegen linearer Abhängigkeiten verschwindenden Volumens.

# Lineare Abbildungen und Matrizen

VI.1 Lineare Abbildungen mit Beispielen

VI.2 Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

VI.3 Determinantenproduktsatz

VI.4 Matrizen für Projektionen, Streckungen, Drehungen

VI.5 Krummlinige Koordinaten: Zylinderkoordinaten

VI.6 Matrixmutiplikation und LGS, Inverse Matrix

# Lineare Abbildungen mit Beispielen

Lineare Abbildungen $A$ von einem Vektorraum $V$ in einen Vektorraum $W$ erhalten die Vektorraum-Struktur,

$$A(s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2) = (sA(\vec{v}_1) + tA(\vec{v}_2)) \in W\ .$$

Sehr häufig handelt es sich um Abbildungen innerhalb des gleichen Vektorraums $A(\vec{v} \in V) \in V$.

**Beispiele für lineare Abbildungen**:

**Strecken ,Stauchen, Spiegeln** mit einem festen Skalar, $A_s : \vec{v} \mapsto s\vec{v}$.

**Basiswechsel** $A_{\mathrm{B}\to\mathrm{B}'} : \vec{b'}_k = \sum_{l=1}^{D} m_{kl}\vec{b}_l$.

**Orthogonale Projektion** auf eine Richtung $\vec{\hat{a}}$, $P_{\hat{a}}(\vec{v}) := (\vec{\hat{a}} * \vec{v}) \cdot \vec{\hat{a}}$.

**Drehungen** $D_{\vec{\alpha}}$ um eine Achse $\vec{\hat{\alpha}}$ mit dem Winkel $\alpha$, $D_{\vec{\alpha}}(\vec{v}) = \vec{v'}$ mit: die Komponente von $\vec{v'}$ in Achsrichtung ist unverändert zu der von $\vec{v}$ , die Komponente von $\vec{v'}$ in der Ebene senkrecht zur Achse bildet mit der von $\vec{v}$ einen Winkel $\alpha$ und $\left|\vec{v'}\right| = |\vec{v}|$.

Abbildungsterme für Drehungen folgen noch.

Eine **Verschiebung** um einen festen Vektor, $\vec{v} \mapsto \vec{v} + \vec{a}$ ist übrigens **keine** lineare Abbildung.

# Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

Bei der linearen Abbildung eines Basiswechsels sieht man, dass sie durch eine $D \times D$ Matrix mit Komponenten $m_{kl}$ festgelegt ist. Ausgedrückt mit Hilfe von Basen in den Vektorräumen $V, W$ lässt sich jede lineare Abbildung durch Matrizen darstellen. Wir beschränken uns im Folgenden auf einen Vektorraum $V = W$ und eine ONB $\{\vec{e}_k\}_{k=1,\ldots,D}$. Zu einer linearen Abbildung $A : V \to V$ reicht es dann, ihre Wirkung auf die Basisvektoren zu kennen, was sich wieder als Linearkombination mit der Basis darstellen lässt,

$$A(\vec{e}_l) = \sum_{k=1}^{D} \vec{e}_k \cdot a_{kl},$$

wobei $D^2$ Zahlen $a_{kl}$ die lineare Abbildung festlegen Man kann sie auch berechnen aus der Wirkung von $A$ auf die Basis durch Skalarmultiplikation mit der Basis,

$$a_{ml} = \vec{e}_m * A(\vec{e}_l)\,. \quad (\mathrm{LA-M})$$

# Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

Ausgedrückt für die Komponenten $v_l$ eines Vektors $\vec{v} = \sum_{l=1}^{D} v_l \vec{e}_l$ lautet die Abbildungsvorschrift

$$A(\sum_{l=1}^{D} v_l \vec{e}_l) = \sum_{l,k=1}^{D} \vec{e}_k \cdot a_{kl} \cdot v_l,$$

Durch Skalarmultiplikation mit $\vec{e}_m$ erhalten wir die $m$-te Komponente des Bildvektors

$$A(\sum_{l=1}^{D} v_l \vec{e}_l)_m = \sum_{l=1}^{D} a_{ml} v_l \,. \quad (M1)$$

# Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

Die Vorschrift (M1) lässt sich mit den $a_{ml}$ als Matrix $A$ und den $v_l$ als Spaltenvektoren $\vec{v}$ als **Matrixmultiplikation** einer Matrix mit einen Spaltenvektor definieren:

$$A(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$$

Sie ist zeilenweise definiert wie eine Skalarmultiplikation zwischen einem Zeilenvektor der Matrix $A$ und dem Spaltenvektor $\vec{v}$:

Zeile * Spalte

$$\begin{pmatrix} A(\vec{v})_1 \\ A(\vec{v})_2 \\ A(\vec{v})_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Zum Beispiel:

$$A(\vec{e}_1)_2 = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot 0 = a_{21}$$

# Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

Vielleicht kennen Sie aus der Schule die Matrixmultiplikation mit einem Vektor für stochastische Prozesse: Ein Zustandsvektor $\vec{v}$ wird in einem Zeitschritt $t_0 \to t_1$ mit Hilfe einer stochastichen Matrix $S$ auf einen neuen Zustandsvektor abgebildet, $\vec{v}(t_1) = S \cdot \vec{v}(t_0)$. Dies kann man wiederholen für einen weiteren Zeitschritt und fortsetzen. Wir benötigen dann also die **Hintereinanderausführung=Verkettung** linearer Abbildungen. Diese Art der Verkettung linearer Abbildungen als Dynamik von Zuständen wird Ihnen spätestens in der Quantenmechanik wieder begegnen.

# Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

In Komponenten entspricht die Verkettung zweier linearer Abbildungen $B(A(\bullet))$ der Matrixmultiplikation der beiden Matrizen $(A \cdot B)(\bullet)$, die wieder nach dem Schema Zeile $*$ Spalte funktioniert.

Zeile * Spalte

$$\begin{pmatrix} BA_{11} & BA_{12} \\ BA_{21} & BA_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Zum Beispiel:

$$BA_{21} = b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21}$$

Zur Warnung! Die Matrixmultiplikation ist i.A. NICHT kommutativ. Zum Beispiel kommt es bei zwei Drehungen nacheinander um verschiedene Achsen auf die Reihenfolge an.

# Determinantenproduktsatz

Die Determinante hat eine verblüffend einfache Regel bezüglich der Multiplikation von (quadratischen) Matrizen: Sie ist strukturerhaltend, d.h.

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B) \,.$$

Der Beweis dieses "wunderschönen" Determinatenproduktsatzes kann mit einer trickreichen Ausnutzung der multilinearen alternierenden Eigenschaften der Determinante durchgeführt werden (`https://de.wikiversity.org/wiki/Determinante/Multiplikationssatz/Mit_Spalten/Fakt/Beweis`) und wird hier nicht versucht. Eine Konsequenz können wir ziehen für die Determinate einer **inversen Matrix** $A^{-1}$ (wenn sie existiert).

# Determinantenproduktsatz

Die inverse Matrix ist definiert über die Forderung

$$A^{-1} \cdot A = \mathrm{E}_D \,,$$

wobei $\mathrm{E}_D$ die Einheitsmatrix mit nur $1$ auf der Digonalen und $0$ sonst ist. $\mathrm{E}_D$ ist das neutrale Element der Matrixmultiplikation. Aus dem obigen Satz schließen wir leicht, dass gilt:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \,.$$

Wenn eine Matrix eine verschwindende Determinante hat, kann sie nicht invertiert werden. Sie hat Spalten- bzw. Zeilenvektoren, die linear abhängig sind voneinander und somit kein $D$-dimensionales Volumen aufspannen. Die obige definierende Gleichung kann dann auch als LGS für die Matrixelemente von $A^{-1}$ nicht eindeutig gelöst werden mit dem Gauss-Verfahren. Das führt bei linear abhängigen Zeilenvektoren zu Mehrdeutigkeiten oder Unmöglichkeiten bei der Lösung - was sie schon in der Schule erfahren haben. Es gilt tatsächlich: Eine quadratische Matrix $A$ besitzt eine eindeutige inverse Matrix $A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

# Matrizen für Projektionen, Streckungen, Drehungen

Die Projektion auf eine Richtung $\vec{\hat{a}}$ hatten wir schon definiert als $P_{\hat{a}}(\vec{v}) = (\vec{\hat{a}} * \vec{v}) \cdot \vec{\hat{a}}$. Die Matrixdarstellung gewinnen wir aus der Formel (LA-M) als

$$P_{\vec{\hat{a}};ml} = \vec{e}_m * P_{\hat{a}}(\vec{e}_l) = \hat{a}_l \cdot \hat{a}_m \, .$$

Insbesondere, wenn $\vec{\hat{a}} = \vec{e}_k$ gewählt wird, gilt:

$$P_{\vec{e}_k;ml} = \delta_{km}\delta_{kl} \, .$$

Dann ist nur ein Element der Matrix $1$ an der Diagonalstelle zu $k$, alle anderen sind $0$, z.B.

$$P_{\vec{e}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

# Matrizen für Projektionen, Streckungen, Drehungen

Die Streckung mit einem Faktor $s$ hatten wir schon definiert als $A_s(\vec{v}) = s\vec{v}$. Die Matrixdarstellung gewinnen wir aus der Formel (LA-M) als

$$A_{s;ml} = \vec{e}_m * A_s(\vec{e}_l) = s \cdot \delta_{ml}\,.$$

also ein $s$-faches der Einheitsmatrix,

$$A_s = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}\,.$$

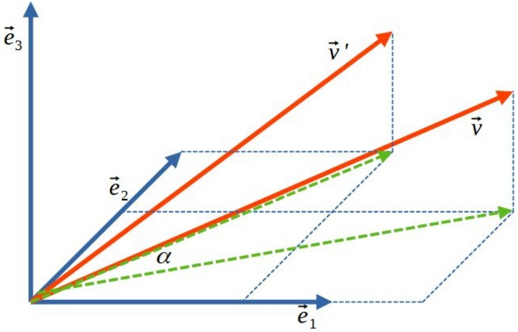
# Matrizen für Projektionen, Streckungen, Drehungen

Wir legen legen zur Vereinfachung einer Drehung die $3-$ Achse in Richtung der Drehachse und schauen uns zur Konstruktion der Drehmatrix eine Abbildung der Situation an.

$$\vec{v}\,' := D_{\alpha \vec{e}_3} \cdot \vec{v}$$

$$v'_3 = v_3$$

$$(v'_1)^2 + (v'_2)^2 = (v_1)^2 + (v_2)^2$$



# Matrizen für Projektionen, Streckungen, Drehungen

Zusätzlich zu den Bedingungen in der Abbildung können wir das Skalarprodukt der beiden Vektoren heranziehen, woraus folgt:

$$v_1 v_1' + v_2 v_2' = ((v_1)^2 + (v_2)^2) \cdot \cos\alpha \, .$$

Ebenso können wir das Kreuzprodukt der beiden Projektionen in der $1-2$ Ebene heranziehen und seinen Betrag bilden,

$$v_1 v_2' - v_2 v_1' = ((v_1)^2 + (v_2)^2) \cdot \sin\alpha \, .$$

Durch Anwendung des Gauss-Verfahrens auf die beiden Gleichungen erhalten wir die Gleichungen für $v_1', v_2'$ als Funktion der Koordinaten $v_1, v_2$ und des Winkels $\alpha$.

$$v_1' = v_1 \cos\alpha - v_2 \sin\alpha; \;\; v_2' = v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha \, .$$

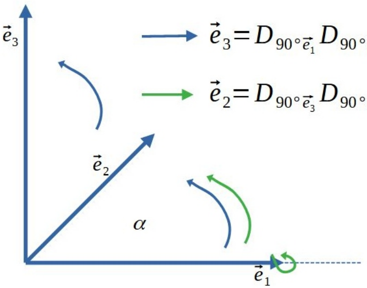
Die Matrix einer Drehung um die $3-$Achse lautet entsprechend

$$D_{\alpha\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \, .$$

# Matrizen für Projektionen, Streckungen, Drehungen

Am Beispiel der zweier Drehungen nacheinander (erst um die $3$-Achse um $90^\circ$, dann um die $1$-Achse um $90^\circ$) sieht man klar, dass es auf die Reihenfolge ankommt.

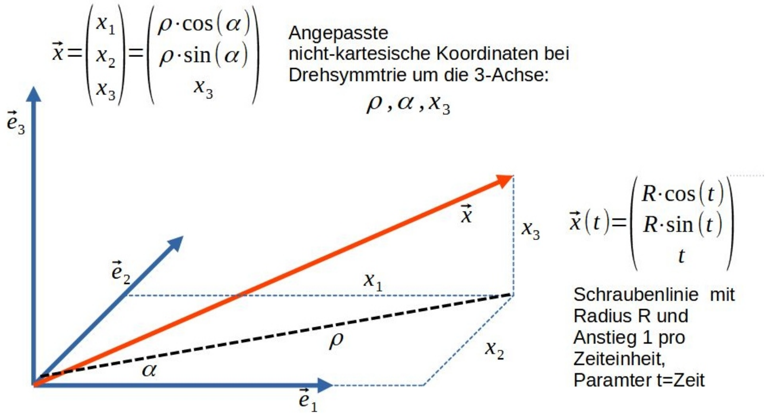
Inkompatibilität von Drehungen um verschiedene Achsen




In der Quantenmechanik wird es wichtig, dass die Eigenschaft der Drehung um zwei verschiedene Achsen zwei nicht zusammen vorliegende (inkompatible) Eigenschaften sind: Eine kann vorliegen und später die andere; aber nicht beide zusammen gleichzeitig.

# krummlinige Koordinaten: Zylinderkoordinaten

Kartesischen Koordinaten $x_j$ eines Vektors $\vec{x}$ sind dann nicht gut geeignet, wenn Untermannigfaltigkeiten im Raum durch Symmetrien definiert sind, wie z.B. Kreisflächen, Kugeloberflächen oder Zylinderoberflächen oder Kurven auf diesen Flächen. Bei angepassten Koordinaten sind einige wie z.B. der Radius einer Kugel konstant. Wir schauen uns explizit Zylinderkoordinaten an:



# Matrixmutiplikation und LGS, Inverse Matrix

Ein lineares Gleichungssystem zu Variablen $x_1, x_2, x_3$ mit einer Koeffizientenmatrix mit Spaltenreihung zu $(x_1 \; x_2 \; x_3 \; 1)$ -wie bereits dargestellt- kann auch als Matrixgleichung aufgefasst werden von der Form

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}, \quad \text{(LGM)}$$

wobei $A$ die Koeffizienten der Spaltenreihung $(x_1 \; x_2 \; x_3)$ beinhaltet und $\vec{b}$ die Spalte der Koeffizienten ohne Variablen auf der rechten Seite des LGS. Fasst man das LGS so auf, sucht man nach einer **inversen** Matrix $A^{-1}$ zu $A$, denn bei ihrer Existenz ist

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}.$$

# Matrixmutiplikation und LGS, Inverse Matrix

Mit Hilfe des Determinatenproduktsatzes kann man aus der obigen Matrixgleichung (LGM) eines LGS eine explizite eindeutige Lösung durch Determinaten angeben. Sie heißt **Cramersche Regel** und ist anwendbar, wenn $A$ invertierbar ist. Man erhält sie aus dem Produktsatz, indem man den Spaltenvektor $\vec{x}$ so zu einer $D \times D$ Matrix erweitert, dass er an der $j$-ten Spalte steht und sonst nur $1$ auf den Diagonalen und $0$ sonst eingetragen sind. Auf der rechten Seite der Matrixgleichung steht dann eine Matrix $\tilde{A}_j$, die aus $A$ entsteht, wenn man an der $j$-ten Spalte den Vektor $\vec{b}$ einträgt. Man kann sich durch die Regel Zeile $*$ Spalte davon überzeugen, dass das die gleichen Aussagen liefert wie (LGM). In dieser Form können wir den Produktsatz anwenden und erhalten

$$(\det A) \cdot x_j = \det \tilde{A}_j \ \Rightarrow x_j = \frac{\det \tilde{A}_j}{\det A} \,.$$

Für hohe Dimensionen $D$ ist die Cramersche Regel von keinem praktischen Nutzen, da der Berechnungsaufwand für die Determinanten rasch anwächst. Da sind Lösungsverfahren ala Gauss effektiver.