
Klassische Theoretische Physik II

Blatt 11

WS 2011/12

Abgabe: Dienstag, den 10.01.2012 vor 10 Uhr gegenüber dem Prüfungsamt.

Sie dürfen in **Dreiergruppen** abgeben.

Besprechung: Donnerstag, den 12.01.2012 in den Übungsstunden.

Website: <http://thp.uni-koeln.de/~rk/ktpii2011.html>

Achtung: Dieser Zettel enthält zwei nicht explizit deklarierte Bonusaufgaben, d.h. in die Gesamtwertung gehen wie immer 16 Punkte ein. Nutzen Sie dieses Weihnachtsgeschenk, um Ihr Punktekonto aufzubessern.

42. Colliding Beam vs. Fixed Target (4 Punkte)

Wir wollen in dieser Aufgabe erkunden, warum man in Teilchenbeschleunigern Strahlen leichter Teilchen kollidieren lässt (colliding beam), statt sie auf ein feststehendes Ziel (fixed target) zu schießen. Betrachten Sie dazu zwei Teilchen gleicher Ruhemasse, die mit entgegengesetzter Geschwindigkeit $v < c$ aufeinander zufliegen. Bestimmen Sie die Summe ihrer relativistischen kinetischen Energien im Schwerpunktsystem und in einem System, in dem eines der Teilchen ruht. Vergleichen Sie beide Ergebnisse im nichtrelativistischen und im ultrarelativistischen Grenzfalle (verwenden Sie $\cosh(2x) \approx 2 \cosh^2(x)$ für $x \gg 1$). Vergleichen Sie die Energien für eine e^-/e^+ - und eine p^-/p^+ -Kollision, bei der beide Stoßpartner im Schwerpunktsystem eine Energie von jeweils 100 GeV haben. Was ist die physikalische Erklärung für ihr Ergebnis?

43. Kugelkondensator (4 Punkte)

- a) Welche Kapazität hat ein Kugelkondensator mit Radien R_1 und R_2 , der vollständig mit einem Dielektrikum der Permittivität ϵ gefüllt ist?
- b) Wie groß ist die Kapazität, wenn er nur zur halben Höhe gefüllt ist?

44. Dispersion eines Wellenpakets (4 Punkte)

Nach **8a)** ist die Funktion (ein sog. Gauß'sches Wellenpaket)

$$u(x, t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{dk}{2\pi} \frac{\sqrt{2\pi\sigma_0}}{2} \exp\left(-\sigma_0 \frac{k^2}{2}\right) \exp(i(kx - \omega(k)t))$$

mit Dispersionsrelation $\omega(k) = ck$ eine Lösung der Wellengleichung.

- a) Berechnen Sie $u(x, 0)$.
- b) Berechnen Sie die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Welle und stellen Sie zunächst eine Vermutung über die zeitliche Entwicklung des Wellenpakets auf. Bestätigen Sie diese durch Berechnung von $u(x, t)$.
- c) Betrachten Sie $\omega = ck^2$. Wie verändert sich die Breite von $|u(x, t)|^2$ mit der Zeit? Was hat das mit der Phasengeschwindigkeit zu tun?

45. Invarianz der Euler-Lagrange-Gleichungen

(4 Punkte)

Zeigen Sie auf zweierlei Weise, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen zur Lagrangefunktion L unter der Transformation

$$L(q, \dot{q}, t) \mapsto L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}\chi(q, t)$$

invariant sind.

46. Geodäten

(4 Punkte)

Bestimmen Sie die kürzeste Verbindung zwischen zwei gegebenen Punkten

- in der euklidischen Ebene,
- auf einem Zylindermantel.

Hinweis: Parametrisieren Sie die Kurve in geeigneten Koordinaten und minimieren Sie das Kurvenlängenfunktional.

47. Brachistochrone

(4 Punkte)

- Betrachten Sie zunächst das Funktional

$$F : V = \{\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \gamma \in C^2[a, b], \gamma(a) = y_0, \gamma(b) = y_1\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \gamma \mapsto \int_a^b L(\gamma, \gamma') dt$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\xi, \eta) \mapsto L(\xi, \eta)$ und zeigen Sie, dass für einen stationären Punkt γ des Funktionals die Funktion $(L(\xi, \eta) - \eta \frac{\partial L}{\partial \eta})|_{(\gamma, \gamma')}$ konstant ist. Dies entspricht in der Mechanik gerade der Aussage, dass für ein zeitunabhängiges System die Energie längs der Lösungskurven konstant ist.

- Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass die Laufzeit eines Körpers zwischen zwei gegebenen Punkten im Schwerfeld entlang einer Zykloide minimal wird.

Bemerkung: Die minimale Laufzeit wird, wie man intuitiv vermutet, tatsächlich für einen einzelnen Zykloidenbogen erreicht, wohingegen eine Kollektion mehrerer kürzerer Bogen, auf denen sich der Massenpunkt auch wieder aufwärts bewegt, ebenfalls ein stationärer Punkt des Funktionals ist. Ein Beweis findet sich in Storch/Wiebe - Lehrbuch der Mathematik Band III, Satz 10.B.4.

48. Lesetipp

(keine Punkte)

Lesen Sie als Vorbereitung auf den kommenden Stoff das Kapitel "Principle of least action" im zweiten Band der Feynman Lectures.

Wir wünschen allen Studenten geruhsame Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr.