Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD Dr. Rochus Klesse
Moritz Ernst, Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 4

WS 2011/12

Abgabe: Dienstag, den 08.11.2011 vor 10 Uhr gegenüber dem Prüfungsamt.
Sie dürfen in **Dreiergruppen** abgeben.
Besprechung: Donnerstag, den 10.11.2011 in den Übungsstunden.
Website: http://thp.uni-koeln.de/∼rk/ktpii2011.html

0. Organisatorisches *(0 Punkte)*

Wegen einer Tagung können Kasper und Matthias am 10. 11. leider keine Übungsgruppe halten. Die Studenten dieser Gruppen schließen sich am 10.11. bitte Karins Gruppe an.

0. Fragestunde *(0 Punkte)*

Ab dem 03.11. bieten die Assistenten donnerstags um 14:00 im Foyer eine Fragestunde zu den Aufgaben des jeweils aktuellen Zettels an.

13. Die Eichfreiheit der Elektrodynamik *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, dass die Eichtransformation der Potenziale

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\chi\,, \quad \phi \to , \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

wobei $\chi(\mathbf{r}, t)$ ein beliebiges stetig differenzierbares Skalarfeld ist, das elektromagnetische Feld invariant lässt.

b) Für die Potenziale $\mathbf{A}$, ϕ sei die Lorentz-Eichbedingung verletzt, d.h.

$$f := \mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0$$

Nun sei das Skalarfeld χ eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit Inhomegenität $-f$, d.h.

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -f\,.$$

Zeigen Sie, dass die mit χ gemäß a) umgeeichten Potenziale $\mathbf{A}'$, ϕ' die Lorentz-Eichbedingung erfüllen.

c) Finden Sie die Felder sowie die Ladungs- und Stromverteilung, die zu

$$\phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r^2}\mathbf{e_r}$$

gehören.

d) Was geschieht mit den Potenzialen aus c), wenn man sie mit $\chi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r}$ umeicht?

14. Elliptisch polarisiertes Licht *(4 Punkte)*

Betrachten Sie das folgende elektrische Feld einer elektromagnetischen ebenen Welle

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = (\mathbf{E}_{0,1} + \mathbf{E}_{0,2})\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

mit

$$\mathbf{E}_{0,1} = (0,a,0), \quad \mathbf{E}_{0,2} = (0,0,be^{i\pi/2}), \quad a \text{ und } b \text{ reell}, \quad \mathbf{k} = (k,0,0).$$

Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit der Polarisationsrichtungen des elektrischen und magnetischen Felds bei $\mathbf{r} = 0$. **Hinweis:** Verwenden Sie die Beziehung zwischen den Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes.

15. Wiederholung: Gaußintegrale *(4 Punkte)*

a) Zeigen und merken Sie sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Hinweis: quadrieren Sie die Identitat und bestimmen Sie das auftretende Zweifachintegral $\int dx \int dy\, e^{-x^2-y^2}$ mittels Transformation auf Polarkoordinaten.

b) Zeigen Sie mittels a) und quadratischer Ergänzung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}}\,.$$

c) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ der normierten Gaußfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,.$$

d) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}\, e^{i(kx-\omega(k)t)}\,, \quad \omega(k) = ck\,,$$

eine um $\Delta x = ct$ verschobene Gaußfunktion der Breite σ beschreibt.

16. Wiederholung: Fouriertransformation *(4 Punkte)*

Die *Fourier-Transformierte* $\tilde{f}(k)$ einer absolut integrierbaren Funktion $f(x)$ ist bekanntlich durch

$$\tilde{f}(k) := \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x)\, e^{-ikx}$$

gegeben. Mit ihr lässt sich $f(x)$ nach ebenen Wellen e^{ikx} gemäß

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{f}(k)\, e^{ikx}$$

entwickeln. Im Folgenden bezeichne g eine weitere Funktion, $\delta(x)$ die "Delta-Funktion", f_a die um a verschobene Funktion $f_a(x) := f(x-a)$ und $f * g$ sei die *Faltung von f und g*, definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} dy\, f(y) g(x-y)\,.$$

Zeigen Sie

$$\widetilde{\frac{df}{dx}}(k) = ik\tilde{f}(k)\,, \quad \tilde{f}_a(k) = e^{ika}\tilde{f}(k)\,, \quad \widetilde{e^{iqx}f}(k) = \tilde{f}(k-q)\,, \quad \widetilde{f*g}(k) = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)\,, \quad \tilde{\delta}(k) = 1\,.$$

17. Fourier-Transformation von Distributionen (freiwillig) *(0 Punkte)*

Auch für temperierte Distributionen, d.h. für linear-stetige Funktionale auf dem Raum $\mathcal{S}$ der schnell fallenden Funktion, lässt sich eine Fourier-Transformation definieren. Die in Aufgabe 16 definierte Fourier-Transformation bildet $\mathcal{S}$ auf sich selbst ab, sodass folgende Definition sinnvoll ist: ist T eine temperierte Distribution, so wird ihre Fouriertransformation durch die Gleichung

$$\hat{T}(\hat{\phi}) = T(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}$$

definiert. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, dass für die Deltadistribution $\hat{\delta} = \frac{1}{2\pi}$ sowie $\hat{1} = \delta$ gilt. Beachten Sie, dass es sich hierbei um eine Gleichheit unter Distributionen handelt.

Bemerkung: Die jeweils einzeiligen Beweise liefern einen wasserdichten Rahmen für die mnemotechnische Notation

$$\text{“}\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(ikx)\, dx\text{“;}$$

beachten Sie, dass dieses Integral als solches gar nicht existiert.