Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD Dr. Rochus Klesse
Moritz Ernst, Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 5

WS 2011/12

Abgabe: Dienstag, den 15.11.2011 vor 10 Uhr gegenüber dem Prüfungsamt
Vorlesung: Die Dienstagvorlesung (08.11.11) fällt aus und wird am Freitag (11.11.11) um 12 Uhr nachgeholt.
Besprechung: Donnerstag, den 17.11.2011 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/ktpii2011.html

18. Nabla- und Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten *(4 Punkte)*

Sie haben schon des Öfteren die Vorzüge von geeigneten Koordinaten in Aktion gesehen. Hier werden Sie am Beispiel der Zylinderkoordinaten lernen, wie Sie die Ableitungsoperatoren auf ein gewähltes Koordinatensystem übertragen können.

a) Beginnen Sie damit aus $\mathbf{r} = (x, y, z)^T = (r\cos(\phi), r\sin(\phi), z)^T$ die partiellen Ableitungen nach r, ϕ, z zu bilden (jeweils unter Konstanthaltung der beiden verbleibenden Variablen), für diese gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}|_{\phi,z} = h_r \mathbf{e}_r, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}|_{r,z} = h_\phi \mathbf{e}_\phi, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}|_{r,\phi} = h_z \mathbf{e}_z,$$

dabei seien $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ Einheitsvektoren und h_r, h_ϕ, h_z positive Funktionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie diese. Zeigen Sie außerdem, dass die so erhaltenen Einheitsvektoren ein rechthändiges Koordinatensystem bilden.

b) Man nennt für eine ortsabhängige Funktion df das Differential von f. Wählt man Koordinaten x_i und einen Koordinatenvektor $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}_i = x_i$ kann man das Differential "durchziehen"

$$df(x_1, x_2, \ldots) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = d\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} f.$$

Das Differential von $\mathbf{r}$ in Zylinderkoordinaten ist also $d\mathbf{r} = h_r \mathbf{e}_r dr + h_\phi \mathbf{e}_\phi d\phi + h_z \mathbf{e}_z dz$. Weiter gilt für eine beliebige Funktion f

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz = d\mathbf{r} \cdot \nabla_z f.$$

Vergleichen Sie die Koeffizienten der Differentiale und finden Sie so die Darstellung von Nabla in Zylinderkoordinaten. (Ergebnis: $\nabla_z = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$)

c) Zeigen Sie nun, dass der Laplaceoperator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ in Zylinderkoordinaten gegeben ist als

$$\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

19. Lorentz-Eichung der retardierten Potenziale *(4 Punkte)*

In der Vorlesung haben Sie die Greensche Methode zur Lösung von Differentialgleichungen kennengelernt. Für die Wellengleichungen

$$\Box\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{und} \quad \Box\mathbf{A} = -\frac{\mathbf{j}}{\mu_0}$$

wurden die Lösungen

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\epsilon_0}(G*\rho)(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \\
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \mu_0(G*\mathbf{j})(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}
\end{aligned}$$

hergeleitet.
Zeigen Sie, dass diese der Lorenz-Eichung $\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$ genügen. Bevor Sie anfangen die komplizierten Ableitungen der rechten Seiten auszurechnen, erinnern Sie sich daran, dass die Fouriertransformation Faltungen faktorisiert. Verwenden Sie anschließend die Kontinuitätsgleichung. Selbstverständlich steht Ihnen auch der andere Weg offen.

20. Feldenergie einer Stromdichte *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie für differenzierbare Vektorfelder $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und Gebiet V folgende Identität:

$$\int_V \mathbf{B}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A}\,dV = \int_{\partial V}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\,d\mathbf{f} \;+\; \int_V(\mathrm{rot}\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}\,dV\,.$$

Hinweis: Integrieren Sie die Identität $\mathrm{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{B}$ über V; Satz von Gauß.

b) Zeigen Sie, dass eine statische und räumlich begrenzte Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ die Energie

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi}\int d^3r\int d^3r'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

trägt.

21. Elektromagnetisches Feld eine Stromstoßes *(4 Punkte)*

Ein unendlich langer gerader Draht parallel zur z-Achse erfahre zur Zeit $t = 0$ einen Stromstoß der Ladung Q. Die entsprechende zeitabhängige Stromdichte lautet

$$\mathbf{j} = Q\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(t)\,\mathbf{e}_z\,.$$

Bestimmen Sie das retardierte Vektorpotential und daraus das E- und das B-Feld.
Was ist mit dem Skalarpotential?