Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD Dr. Rochus Klesse
Moritz Ernst, Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 8

WS 2011/12

Abgabe: Dienstag, den 06.12.2011 vor 10 Uhr gegenüber dem Prüfungsamt.
Sie dürfen in **Dreiergruppen** abgeben.
Besprechung: Donnerstag, den 08.12.2011 in den Übungsstunden.
Website: http://thp.uni-koeln.de/∼rk/ktpii2011.html

30. Gruppeneigenschaften der Lorentztransformation *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie ausgehend von der Definition

$$\mathcal{L} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) | g = A^t g A,\ g = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)\},$$

dass die Lorentztransformationen eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation bilden.

b) Seien $A(v)$ und $A(w)$ Matrizen, die eine Lorentztransformation in x-Richtung mit Geschwindigkeiten v bzw. w beschreiben. Nach a) beschreibt $A(v)A(w)$ ebenfalls eine Lorentztransformation in x-Richtung - aber mit welcher Geschwindigkeit? Hinweis: Rechnen Sie konkret mit 2×2 -Matrizen und verwenden Sie Identitäten für hyperbolische Funktionen.

31. Eine Variante des Zwillingsparadoxons *(4 Punkte)*

Zwei Zwillinge synchronisieren ihre Uhren. Einer der beiden Zwillinge startet mit seiner Rakete und fliegt nach einer zu vernachlässigenden Beschleunigungsphase mit einer Geschwindigkeit von $0.9c$ weg. Nachdem für den zurückgebliebenen Zwilling ein Jahr vergangen ist, ist er des Wartens auf die Rückkehr seines Bruders überdrüssig geworden und fliegt mit einer Geschwindigkeit von $0.95c$ hinterher. Welche Zeiten zeigen die Uhren der Zwillinge an, wenn sie sich treffen?

32. Vorbeifliegender Stab *(4 Punkte)*

Ein Stab, der im Zustand der Ruhe die Länge l' besitze, fliege an Ihnen mit der Geschwindigkeit v in Richtung seiner Ausdehnung vorbei.

a) Wie lange dauert es, bis er an Ihnen vorbei ist?

b) Wie lange dauert dieser Vorgang in seinem Ruhesystem? Vergleichen Sie die beiden Zeiten.

c) Ist das Ergebnis verträglich mit der Zeitdilatation, und wenn ja, wieso?

33. Tensoren *(4 Punkte)*

Erinnern Sie sich, dass das Tensorprodukt $V \otimes W$ zweier $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W mit Basen

$$\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}, \ \mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

wieder ein Vektorraum mit Basis

$$\mathcal{B}_{V \otimes W} = \{v_i \otimes w_j | 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m\}$$

ist, dessen Elemente für alle $v, v' \in V, \ w, w' \in W, \ \lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden Eigenschaften haben:

$$\lambda(v \otimes w) = \lambda v \otimes w = v \otimes \lambda w, \quad (v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w, \quad v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'.$$

Wir wollen in dieser Aufgabe die Beziehung zwischen den in der Physik verwendeten "Tensoren" und den tatsächlichen Tensoren sowie die Bedeutung von ko- und kontravarianten Indizes klären. Sofern Sie Zweifel an der Existenz des Tensorprodukts bzw. Interesse an seiner universellen Kontruktion haben, konsultieren Sie etwa "Fischer - Lineare Algebra".

a) Sei $v = \lambda^i v_i \in V$ ein Vektor (Summenkonvention!). Wie transformieren sich die Komponenten λ^i unter einem Basiswechsel? Gehen Sie davon aus, dass die Basisvektoren sich gemäß $v'_j = (A^{-1})^i_j v_i$ transformieren. Denken Sie daran, dass der Vektor als geometrisches Objekt natürlich invariant unter Basistransformationen sein muss.

b) Sei $f = f_i \theta^i \in V^*$ ein Dualvektor, d.h. eine lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$. Dabei bezeichnet $\{\theta^j\}$ die zu $\mathcal{B}_V$ duale Basis, d.h. es gilt $\theta^j(v_i) = \delta^j_i$. Wie transformieren sich die Komponenten f_i unter einem Basiswechsel? Beachten Sie, dass $\theta'^j(v'_i) = \delta^j_i$ auch in der neuen Basis gelten muss.

Wie Sie gesehen haben, transformieren sich die Komponenten von Vektoren wie duale Basisvektoren und die Komponenten von Dualvektoren wie Basisvektoren. Man bezeichnet dieses Verhalten als kontra- bzw. kovariant. Beachten Sie insbesondere, dass in der physikalischen Literatur häufig die falsche Aussage zu finden ist, dass es die Vektoren seien, die sich kontravariant transformieren - gemeint sind hier stets die Komponenten(!) der Vektoren. Dass sich diese wie duale Basisvektoren transformieren, ist aber nicht verwunderlich, denn es gilt offensichtlich $\lambda^i = \theta^i(v)$.

c) Machen Sie sich klar, dass die Matrixelemente einer linearen Abbildung $F : V \to W$ sich gemäß $M(F)^j_i = \phi^j(F(v_i))$ berechnen lassen. Hierbei bezeichnet $\{\phi^1, \ldots, \phi^m\}$ die Basis von W^*, die dual zur Basis $\mathcal{B}_W$ ist. Folgern Sie nun das Transformationsverhalten der Matrixelemente mit Hilfe der Aufgabenteile a) und b).

d) Sei $B : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform, deren Matrixelemente über $B_{ij} = B(v_i, v_j)$ definiert seien. Wie transformieren sich diese (verwenden Sie wieder a) und b))?

Zur Erläuterung: was Sie hier zu Gesicht bekommen haben, sind die kanonischen Isomorphismen $Hom(V, W) \cong W \otimes V^*$ und $Bil(V, V) \cong V^* \otimes V^*$. Lineare Abbildungen und Bilinearformen lassen sich also als Tensoren im eigentlichen Sinne auffassen. Die "Tensoren" der physikalischen Literatur sind die Komponenten dieser Objekte bzgl. gewählter Basen von V und W (womit auch Basen von $V^* \otimes W$ bzw. $V^* \otimes V^*$ gewählt wurden). Jeder kontravariante (oben stehende) Index gehört dabei zu einem Vektorraum-Faktor im Tensorprodukt und jeder kovariante (unten stehende) Index zu einem Dualraum-Faktor. Weiterhin haben Sie anhand der Aufgabenteile c) und d) gesehen, dass es **sinnlos ist, vom Transformationsverhalten einer Matrix zu sprechen,** da sowohl lineare Abbildungen, Bilinearformen als auch "Bivektoren" aus $V \otimes V$ als Matrizen dargestellt werden können, sich jedoch **vollkommen unterschiedlich transformieren.**

e) Machen Sie sich klar, dass eine nicht-ausgeartete Bilinearform $B : V \times V \to \mathbb{K}$, wie etwa die Minkowskimetrik, einen kanonischen Isomorphismus $I : V \to V^*$ liefert. Was ist also die Bedeutung des "Indexziehens" $x^i g_{ij} = x_j$?