Theoretische Physik in zwei Semestern I

Priv.-Doz. Dr. Rochus Klesse

Sommersemester 2005

Wichtiger Hinweis

Es handelt sich nicht um ein Skript zur Vorlesung, sondern um eine Auflistung (Mechanik) bzw. Zusammenfassung (Elektrodynamik) der wichtigsten Inhalte.

Literatur

Mechanik:

- H. Goldstein, Klassische Mechanik
- H. G. Schuster, Deterministic Chaos – An Introduction
- E. Mach, Die Mechanik (kein Lehrbuch, Geschichte der Mechanik)

Elektrodynamik:

- J. D. Jackson, Classical Electodynamics (auch in deutscher Übersetzung).

Spezielle Relativitätstheorie:

- W. Rindler, Essential Relativity

Druckfehler bitte ich zu entschuldigen und mir mitzuteilen,
am besten per email an: rk@thp.uni-koeln.de . Danke!

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mechanik

Newtons Mechanik der Massenpunkte

Grundbegriffe

Massenpunkt, Euklidischer Raum, Zeit

Kinematik

Bahn, Geschwindigkeit, Beschleunigung

Dynamik

Newtonsche Axiome, Impuls, Drehimpuls, kinetische und potentielle Energie, träge Masse und schwere Masse

N Newtonsche Massenpunkte

Differentialgleichungen, Eulersches Lösungsverfahren, Phasenraum, Erhaltungssätze

Zwei-Körper-Problem mit Zentralkraft

Flächensatz, effektives Potential, Keplersche Gesetze

Rotierende Bezugssysteme

Scheinkräfte, Corioliskraft

Lagrange-Formalismus

Zwangsbewegung

Zwangsfläche, Zwangskraft, verallgemeinerte Koordinaten

Lagrange-Gleichungen

Herleitung aus der Newtonschen Mechanik, Herleitung aus dem Hamiltonschen Prinzip, Fermatsches Prinzip

Hamiltonscher Formalismus

Hamilton-Funktion, Hamiltonsche Gleichungen, Phasenraum

Komplexe mechanische Systeme

Kleine Schwingungen

stabile/instabile Gleichgewichtslagen, Linearisierung, Eigenwertproblem, Eigenschwingungen

Deterministisches Chaos

Lyapunov-Exponent

Kapitel 2

Grundbegriffe der Elektrodynamik

2.1 Elektrische Ladungen und Ströme

In der Elektrodynamik wird jedem Massenpunkt neben seiner Masse m auch eine **elektrische Ladung** q zugeschrieben. Die elektrische Ladung ist eine skalare Größe und wird in Einheiten von C = Coulomb = Ampère × Sekunde = As gemessen. Erfahrungsgemäß ist die Ladung q gequantelt in positiven oder negativen ganzzahligen Vielfachen der Ladung $e = -1.601^{-19}C$ eines Elektrons.

Die **elektrische Ladungsdichte** ist definiert als

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\delta Q}{\delta V_\mathbf{r}} ,$$

mit Q der in einem hinreichend kleinen Volumen $\delta V_\mathbf{r}$ um $\mathbf{r}$ enthaltenen elektrischen Ladung.

Der **elektrische Strom** I_S durch eine Fläche S ist die pro Zeiteinheit δt durch S fließende Ladung δQ_S,

$$I_s = \frac{\delta Q_S}{\delta t} .$$

Die **elektrische Stromdichte j** gibt den lokalen Strom pro Flächenelement an und erfüllt demnach die Beziehung

$$I_S = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{f}$$

für beliebige Flächen S. Falls die elektrische Ladungsdichte fest mit Materie verbunden ist, die gemäß einem Geschwindigkeitsvektorfeld $\mathbf{v}$ strömt, so gilt

$$\mathbf{j} = \mathbf{v}\rho .$$

Die elektrische Ladung ist eine strikte Erhaltungsgröße: Ladungen können nicht verschwinden, sondern allenfalls verschoben werden. Dies äußert sich in der **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{d}{dt}\rho(\mathbf{r},t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0 .$$

2.2 Elektrisches und magnetisches Feld

Das **elektrische Feld E** und das **magnetische Feld B** ist durch die **Lorentzkraft**

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

auf eine elektrische Ladung q definiert. Die Kontinuumsversion für die **Kraftdichte** $\mathbf{f} = \delta\mathbf{F}/\delta V$ lautet

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

Die Felder **E** und **B** genügen den **Maxwellschen Gleichungen**. In Abwesenheit polarisierbarer oder magnetisierbarer Materialien lauten sie:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon}\,, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0\,, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{d}{dt}\mathbf{B}\,, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_o \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\mathbf{E}\,. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} CV^{-1}m^{-1}$ die **Influenzkonstante** und $c = 2.99792458 m/s$ die **Lichtgeschwindigkeit im Vakuum**.

Kapitel 3

Elektrostatik

3.1 Gaußsches Gesetz

Für konstante Ladungsdichte und verschwindender Stromdichte reduzieren sich die Maxwellschen Gleichungen des elektrischen Feldes auf

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0\,.$$

Integration der ersten Gleichung über ein endliches Volumen V und Anwendung des Satz von Gauß führt auf das **Gaußsche Gesetz**

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} d\mathbf{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V\,,$$

wobei $Q_V = \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$ die in dem Volumen V enthaltene Ladung ist.

Mit Hilfe dieses Gesetzes folgt leicht aus $\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ das **Coulomb-Gesetz** für die elektrostatische Kraft zwischen zwei Punktladungen q_1, q_2 an Orten $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,.$$

Aufgrund der formalen Analogie des Coulomb-Gesetzes und der Newtonschen Gravitationskraft

$$\mathbf{F}^G_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,, \quad \gamma = 6.67 \times 10^{-11} m^3/kg/s^2\,,$$

gilt für das **Gravitationsfeld G** (definiert durch die Beziehung $\mathbf{F}^G = m\mathbf{G}$) ein entsprechendes Gesetz:

$$\int_{\partial V} \mathbf{G} d\mathbf{f} = -4\pi\gamma M_V\,, \qquad M_v = \int_V \rho_m(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}\,.$$

Diese Gesetz erlaubt einen einfachen Beweis dafür, dass die Gravitationskraft zwischen zwei (sich nicht überschneidenden) Körpern mit radialsymmetrischen Massendichten genau gleich der Gravitationskraft zwischen zwei entsprechenden Massenpunkten in den jeweiligen Schwerpunkten ist.

3.2 Elektrostatisches Potential

Aufgrund rot $\mathbf{E} = 0$ besitzt ein statisches, elektrisches Feld $\mathbf{E}$ ein **elektrostatisches Potential** φ definiert durch,

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi\,.$$

Die **elektrische Spannung** U_{12} zwischen zwei Raumpunkten bei $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ ist die Potentialdifferenz

$$U_{12} = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = -\int_{c:\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2} \mathbf{E} d\mathbf{l}\,.$$

Das Potential φ erfüllt die Poissongleichung

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,,$$

mit Laplaceoperator $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\; = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Für gegebene Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ ist

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

eine Lösung der Poissiongleichung mit der Randbedingung $\varphi(\mathbf{r} \to \infty) = 0$.

3.3 Elektrische Feld in Materie

In Materie lautet das Gaußsche Gesetz (in differentieller Form)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$$

Hier ist ρ die Ladungsdichte der *freien* Ladungen. Die **elektrische Verschiebung D** hängt mit dem elektrischen Feld **E** über das **Materialgesetz**

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$$

zusammen. Die materialabhängige **Dielektrizitätskonstante** ε ist im Allgemeinen größer eins.

3.4 Kondensator

Ein **Kondensator** besteht aus zwei metallischen Leitern mit Ladungen $Q_1 = -Q_2 \equiv Q$. Der Zwischenraum kann mit einem Dielektrikum (Dielektrizitätskonstante ε) gefüllt sein. Die Spannung $U = \varphi_1 - \varphi_2$ zwischen den Leitern ist eine lineare Funktion der Ladung Q. Das Verhältnis definiert die **Kapazität** des Kondensators,

$$C = \frac{|Q|}{|U|}\,.$$

Die Kapazität eines Plattenkondensators bestehend aus zwei parallelen Platten der Fläche A im Abstand d beträgt

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{A}{d} \, ,$$

die eines Kugelkondesators bestehend aus zwei konzentrischen Kugelschalen mit Radien r_1, r_2 ist

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{|r_2 - r_1|} \, .$$

Kapitel 4

Magnetostatik

In Abwesenheit von Ladungen reduzieren sich die stationären Maxwellschen Gleichungen auf

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \,, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \,.$$

Die zweite Gleichung ist das **Ampèresches Gesetz** in differentieller Form. Integration dieser Gleichung über eine beliebige Fläche S und Anwendung des Satzes von Stokes liefert die integrale Version des Ampèrschen Gesetzes,

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_S \,,$$

wobei $I_S = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{f}$ der Strom durch die Fläche S ist. Probleme genügend hoher Symmetrie lassen sich oft mittels der integralen Version auf elegante Weise lösen.

Ein **Vektorpotential** $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ eines magnetischen Feldes $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ist *per def.* ein Vektorfeld dessen Rotation $\mathbf{B}$ ist,

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B} \,.$$

Mit $\mathbf{A}$ ist auch $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi$, wobei χ ein beliebiges Skalarfeld, eine Vektorpotential von $\mathbf{B}$ (da $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \;\equiv\; 0$). Diese Wahlfreiheit bezeichnet man als eine **Eichfreiheit**, den Übergang von $\mathbf{A}$ zu $\mathbf{A}'$ als eine **Umeichung** des Vektorpotentials.

Zweckmäßig sind Vektorpotentiale $\mathbf{A}$ in **Coulomb-Eichung**, worunter man Vektorpotentiale mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \tag{4.1}$$

versteht. In dieser Eichung erfüllt das Vektorpotential die vektorwertige Poissongleichung

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \,. \tag{4.2}$$

Hier ist der Laplaceoperator komponentenweise auf $\mathbf{A}$ anzuwenden:

$$\Delta \mathbf{A} := \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} \,.$$

Eine Lösung der Poissongleichung (4.2) und der Coulomb-Eichungsbedingung Gl. (4.1) ist das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \, .$$

Also gilt:

4.1 Magnetfeld einer Stromdichte

Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ und Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ einer Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ lauten

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \, ,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\, \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \, .$$

Wichtiger Spezialfall: Magnetfeld einer Strom I führenden Schleife $c : [0, 1] \to \mathbf{R}^3$. Die Stromdichte lautet in diesem Fall

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I \int_0^1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{c}(t))\dot{\mathbf{c}}(t) dt \, .$$

Vektorpotential und Magnetfeld sind hier durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^1 \frac{\dot{\mathbf{c}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dt \equiv \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, ,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^1 \frac{\dot{\mathbf{c}}(t) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dt \equiv \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

gegeben.

4.2 Magnetfeld in Materie

In Materie lautet das Ampère Gesetz

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{j} \, .$$

Hier ist $\mathbf{j}$ die Stromdichte der *freien* Ladungen. $\mathbf{H}$ hängt mit dem magnetischen Feld $\mathbf{B}$ über das **Materialgesetz**

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \mathbf{B}$$

zusammen. Die **magnetische Permeabilität** μ ist eine materialabhängige Konstante. Materialien mit $\mu < 1$ sind **diamagnetische**, solche mit $\mu > 1$ **paramagnetische**. Sonderfälle sind **Supraleiter** mit $\mu = 0$ (perfekt diamagnetisch), und **Ferromagneten** mit $\mu \gtrsim 100$.

4.3 Ohmsches Gesetz

Das Ohmsche Gesetz besagt, dass in einem Leiter ein konstantes elektrisches Feld $\mathbf{E}$ eine stationäre Stromdichte

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

erzeugt. Im Falle von isotropen Leitern ist die **Leitfähigkeit** σ ein Skalar.

Kapitel 5

Elektrodynamik

5.0.1 Faradaysches Induktionsgesetz

Die in einer Schleife c induzierte **Ringspannung** $\mathcal{U}_c = \int_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{l}$ ist

$$\mathcal{U}_c = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi_S(t) \, ,$$

wobei $\Phi_S(t) = \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) d\mathbf{f}$ der **magnetische Fluss** durch eine beliebige von c berandete Fläche $S(t)$ ist.

5.0.2 Induktionskoeffizienten

Ein zeitlich veränderlicher Strom $I_2(t)$ durch eine Schleife c_2 induziert in einer Schleife c_1 die Ringspannung

$$\mathcal{U}_{c_1} = -L_{12} \frac{d}{dt} I_2 \, ,$$

wobei die **Gegeniduktivität** durch

$$L_{12} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \int_{c_1} \int_{c_2}' \frac{\langle d\mathbf{l}, d\mathbf{l}' \rangle}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

gegeben ist. Falls $c_1 = c_2 \equiv c$ spricht man von der **Selbstinduktivität** $L = L_{11}$ der Schleife c.

5.0.3 Magnetische Feldenergie

Eine einen Strom I führende Schleife mit Selbstinduktivität L enthält die (magnetische) Energie

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \, .$$

N Stromschleifen $c_1, \ldots c_N$ mit Gegen/Selbstinduktivitäten L_{ml} und Strömen $I_1, \ldots, I_N$ enthalten die Energie

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{m,l=1}^{N} L_{ml} I_m I_l \, .$$

Allgemeiner: eine Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ enthält die Energie

$$W_m = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}), \mathbf{j}(\mathbf{r}') \rangle}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \, .$$

Diese ist identisch mit

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \langle \mathbf{H}, \mathbf{B} \rangle d^3\mathbf{r} \, .$$

Hieraus ergibt sich die **Energiedichte des Magnetfelds** zu

$$u_m = \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}, \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{2\mu\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \, ,$$

die Energiedichte des elektrischen Feldes ist

$$u_{el} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{D}, \mathbf{E} \rangle = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \, .$$

Die totale Energiedichte des elektromagnetische Feldes ist damit

$$u_{em} = u_{el} + u_m = \frac{1}{2} (\langle \mathbf{D}, \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{H}, \mathbf{B} \rangle)$$

Es gilt der **Energiesatz der Elektrodynamik** (Satz von Poynting)

$$\frac{d}{dt} u_{em} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -P_m \, ,$$

wobei

- $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ die **Energiestromdichte** (auch **Poyntingvektor**)
- $P_m = \langle \mathbf{j}, \mathbf{E} \rangle$ mechanische Leistungsdichte

5.1 Elektrodynamik

Die Maxwellschen Gleichungen im homogenen Medium mit magnetischer Permeabilität μ und Dielektrizitätskonstanten ε lauten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho \, , & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \, , \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{d}{dt} \mathbf{B} \, , & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{d}{dt} \mathbf{D} \, , \end{aligned}$$

wobei ρ und $\mathbf{j}$ Ladungs- und Stromdichte der *freien* Ladungen bedeuten. $\mathbf{D}$ und $\mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{H}$ und $\mathbf{B}$ hängen über die folgenden Materialgesetze zusammen:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}\,, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\mathbf{H}\,,$$

mit $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} CV^{-1}m^{-1}$ und $\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2)$, wobei $c \approx 3 \times 10^8 m/s$ die Lichtgeschwindigkeit Vakuum ist.

5.1.1 Homogene Wellengleichungen

Wenn keine Quellen vorhanden sind, d.h. $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$, erfüllen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ die **homogenen Wellengleichungen**

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{c_m^2}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \\ \Delta\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{c_m^2}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \end{aligned}$$

Hier ist $c_m = c/n$ die Lichtgeschwindigkeit im Medium mit Brechungsindex $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$. $c \approx 3.0 \times 10^8 m/s$ ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

5.1.2 Ebene elektromagnetische Wellen

Spezielle Lösungen der homogenen Wellengleichungen (und der Maxwellschen Gleichungen!) sind ebene Wellen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{e}_p\, f(\langle\mathbf{e}_k,\mathbf{r}\rangle - c_m t)\,, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{c_m}\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_p\, f(\langle\mathbf{e}_k,\mathbf{r}\rangle - c_m t)\,. \end{aligned}$$

mit

- $\mathbf{e}_p$: Polarisationsvektor des elektrischen Feldes,
- $\mathbf{e}_k$: normierter Wellenvektor = Ausbreitungsrichtung der Welle,
- f : beliebige, zweimal differenzierbare Funktion.

Die wichtigsten Eigenschaften:

- $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{e}_k$ paarweise orthogonal
- $|\mathbf{E}| = c_m|\mathbf{B}|$
- Energiestromdichte $\mathbf{S}||\mathbf{e}_k$

Eine monochromatische ebene Welle erhält man für $f(x) = E_k e^{ikx}$, wobei $k \in \mathbf{R}$ die Wellenzahl:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}_p \, E_k \, e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle - i\omega_k t} \,, \\
\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c_m} \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_p \, E_k \, e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle - i\omega_k t} \,.
\end{aligned}$$

mit

- k : Wellenzahl,
- $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_k$: Wellenvektor,
- $\omega_k = c_m k$: Winkelfrequenz

5.2 Strahlenoptik und Fermatsches Prinzip

Die Gesetze der Strahlenoptik und damit auch das Fermatsche Prinzip ergeben sich aus wellenartigen Lösungen der Maxwellschen Gleichungen im Grenzfall unendlich großer Wellenzahlen $k \to \infty$, d.h. verschwindender Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k \to 0$.

In einem Medium mit ortsabhängigem Brechungsindex $n(\mathbf{r})$ lauten die Wellengleichungen:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{n(\mathbf{r})^2}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\
\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{n(\mathbf{r})^2}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)
\end{aligned}$$

Wellenartige Lösungen für große Wellenzahlen erhalten wir aus dem **Eikonal-Ansatz**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) e^{ik(\mathcal{L}(\mathbf{r}) - ct)} \,,$$

mit optischer Länge $\mathcal{L}(\mathbf{r})$ und langsam variierenderem $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$. Einsetzen in obige Wellengleichung und Vernachlässigung von Termen von Ordnung $O(1/k)$ oder höher führt auf die **Eikonal-Gleichung**

$$|\mathrm{grad}\, \mathcal{L}(\mathbf{r})|^2 = n(\mathbf{r})^2 \,.$$

Phasenflächen sind bestimmt durch $\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \mathit{konst}$. Ihre Flächenormalen $\mathbf{e}_s(\mathbf{r})$ sind damit parallel zu grad $\mathcal{L}(\mathbf{r})$, d.h.

$$\mathbf{e}_s(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{grad}\, \mathcal{L}(\mathbf{r})}{|\mathrm{grad}\, \mathcal{L}(\mathbf{r})|} = \frac{\mathrm{grad}\, \mathcal{L}(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \,.$$

Lichtstrahlen laufen längs Bahnen $\mathbf{r}(s)$ die an jedem Punkt senkrecht zu den Phasenflächen laufen. Sind die Bahnen nach der Bogenlänge s parametrisiert ($|\frac{d}{ds}\mathbf{r}(s)| = 1$), so gilt

$$\frac{d}{ds}\mathbf{r}(s) = \frac{\mathrm{grad}\, \mathcal{L}(\mathbf{r}(s))}{n(\mathbf{r}(s))} \,,$$

Differenzieren dieser Beziehung nach s liefert nach etwas Rechnen unter Benutzung der Eikonal-Gleichung die **Strahlengleichng**

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \operatorname{grad} n\,.$$

Mit Abkürzungen $\mathbf{r}' = \frac{d}{ds}\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'' = \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}$ kann sie auch als

$$\mathbf{r}'' = \frac{\operatorname{grad} n}{n} - \langle\frac{\operatorname{grad} n}{n}, \mathbf{r}'\rangle\mathbf{r}'$$

geschrieben werden. Dies ist die Bewegungsgleichung eines Teilchens unter der Wirkung der "Kraft"

$$\frac{1}{n}\operatorname{grad} n - \langle\frac{1}{n}\operatorname{grad} n, \mathbf{r}'\rangle\mathbf{r}'$$

was gerade die zur Bahn senkrechte Komponente von $\frac{1}{n}\operatorname{grad} n$ ist.

Die Strahlengleichung stimmt andererseits mit den Euler-Lagrange-Gleichungen des Laufzeitsfunktionals

$$T[\mathbf{r}(s)] = \frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2} n(\mathbf{r}(s))ds$$

überein. Somit kann das Fermatsche Prinzip der Strahlenoptik durch die Maxwellsche Elektrodynamik begründet werden.

5.2.1 Elektrodynamische Potentiale

Für zeitabhängige Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ sind das **elektrodynamische Vektorpotential** $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ und das **Skalarpotential** $\varphi(\mathbf{r}, t)$ durch folgende Beziehungen definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}\,, \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi - \frac{d}{dt}\mathbf{A}\,. \end{aligned}$$

In **Strahlungseichung**, d.h.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\varphi \equiv 0\,, \tag{5.1}$$

genügen sie den **inhomogenen Wellengleichungen**

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{A} &= -\mu\mu_0\mathbf{j}\,, \\ \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\varphi &= -\rho/\varepsilon\varepsilon_0\,. \end{aligned}$$

Lösungen dieser Gleichungen und der Bedingung (5.1) zu vorgegebenen **Quellen** $\rho(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ sind die **retadierten Potentiale**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}'$$

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}' .$$

Sie unterscheiden sich von den elektrostatischen Potentialen nur durch die **retadierte Zeit** $t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ im Zeitargument der Integranden.

5.2.2 Strahlungsfeld eines Dipols

Eine geschlossene Leiterschleife c führe einen periodischen Strom $I(t) = I_0\cos\omega t$. Aus der entsprechenden Stromdichte $\jmath(\mathbf{r},t)$

$$\jmath(\mathbf{r},t) = I_0\cos\omega t\int_0^1 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{c}(s))\frac{d}{dt}\mathbf{c}(s)ds$$

resultiert das retadierte Vektorpotential in **Fernfeldnäherung** ($|\mathbf{r}| \gg \lambda = 2\pi c/\omega$)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{\omega}{c|\mathbf{r}|}\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{m}\,\sin\omega(t-\frac{|\mathbf{r}|}{c}) ,$$

wobei das **magnetische Moment m** durch

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_F d\mathbf{f} , \quad \text{mit Fläche } F \text{ derart, dass } \partial F = c ,$$

gegeben ist. Das **Strahlungsfeld eines Dipols** in Fernfeldnäherung ergibt sich hieraus zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\omega^2}{c|\mathbf{r}|}\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{m}\,\cos\omega(t-\frac{|\mathbf{r}|}{c}) ,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\omega^2}{c^2|\mathbf{r}|}\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{m})\,\cos\omega(t-\frac{|\mathbf{r}|}{c}) .$$

Die wichtigsten Eigenschaften sind

- $|\mathbf{E}| \propto \frac{1}{|\mathbf{r}|}$, $\quad |\mathbf{B}| \propto \frac{1}{|\mathbf{r}|}$,
- $|\mathbf{E}| \propto \omega^2$, $\quad |\mathbf{B}| \propto \omega^2$,
- $|\mathbf{S}| = \frac{1}{\mu_0}|\mathbf{E}\times\mathbf{B}| \propto \omega^4\frac{1}{|\mathbf{r}|^2}$.

Kapitel 6

Spezielle Relativitätstheorie

Einsteins Spezielle Relativitätstheorie gründet sich auf zwei Postulate:

I. Alle Inertialsysteme sind äquivalent hinsichtlich der Ausführung physikalischer Experimente.

II. Licht breitet sich im Vakuum stets mit der Geschwindigkeit $c \equiv 299792 m/s$ aus, unabhängig vom Bewegungszustand des emittierenden Körpers.

6.1 Gleichzeitigkeit, Uhrensynchronisation, Zeitdilatation,Längenkontraktion

Annahme: Die (Nicht-)Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse A und B am gleichen Ort (d.h. $x_A = x_B$) ist feststellbar und damit die **lokale Gleichzeitigkeit** gegeben.

Zwei beliebige Ereignisse A und B sind **gleichzeitig bzgl. Inertialsystem** K genau dann wenn A und B lokal gleichzeitig mit dem Eintreffen eines Lichtsignals von $x = (x_A + x_B)/2$ bei x_A bzw. x_B. Hierbei sind x_A, x_B die räumlichen Koordinaten bzgl. K der Ereignis A und B.

Zwei Uhren bei x_1 und x_2 bzgl. K werden **synchronisiert** indem sie durch ein Lichtsignal von $(x_1 + x_2)/2$ aus gestartet werden.

Eine Uhr U' ruhe in einem Inertialsystem K', das sich gegenüber K mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewege. Von K aus betrachtet vergeht zwischen den Ereignissen "*U' zeigt Zeit t'_1 an*" und "*U' zeigt Zeit t'_2 an*" die Zeit

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(t'_2 - t'_1) \ .$$

D.h. von K aus betrachtet geht die Uhr U' um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq 1$ langsamer als in K'. Dieses Phänomen heißt **Zeitdilatation**. Es betrifft wegen des Postulats I alle zeitlichen Abläufe gleichermaßen.

Eine direkte Konsequenz der Zeitdilatation ist die **Längenkontraktion**: Aus K betrachtet erscheinen Längen in K' um den Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \leq 1$ verkürzt.

6.2 Minkowski-Raumzeit

Ereignisse sind Elemente eines vierdimensionalen Kontinuums, der **Minkowski-Raumzeit** M. Bezüglich eines Inertialsystems (auch “Bezugssystem”) K ist ein Ereignis $A \in M$ durch einen reellen **Vierervektor**

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

eindeutig beschrieben. x, y, z, sind die Raumkoordinaten bzgl. K, ct ist die Zeitkoordinate bzgl. K des Ereignisses.

6.2.1 Lorentz-Transformation

Bezüglich eines zweiten Intertialsystems K' wird dasselbe Ereignis $A \in M$ durch einen i.A. von $\mathbf{R}$ verschiedenen Vierervektor

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} .$$

beschrieben. Die Transformation $\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}'$ ist eine **Lorentz-Transformation**.

K und K' seien achsenparallele Inertialsysteme, wobei sich der Ursprung O' von K' mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v} = ve_x$ parallel zur x-Achse von K bewege. In diesem Fall lautet die Lorentz-Transformation:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \frac{vx}{c}) , \\ x' &= \gamma(x - vt) , \\ y' &= y , \\ z' &= z , \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Mit $\phi := \operatorname{artanh}(v/c)$ und den Identitäten $\cosh(\operatorname{artanh}(x)) = 1/\sqrt{1-x^2}$ und $\sinh(\operatorname{artanh}(x)) = x/\sqrt{1-x^2}$ erhält die Transformationsmatrix obiger Lorentz-Transformation die einer Drehmatrix sehr ähnliche Form

$$\begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

6.2.2 Skalarprodukt

Für Vierervektoren ist eine Skalarprodukt wie folgt erklärt:

$$\langle \mathbf{R}, \mathbf{R}' \rangle := x_0 x_0' - x_1 x_1' - x_2 x_2' - x_3 x_3' .$$

Eine allgemeine Lorentz-Transformationen

$$\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}' := L\mathbf{R}$$

lässt dieses Skalarprodukt invariant:

$$\langle L\mathbf{R}, L\mathbf{R} \rangle = \langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle .$$

6.2.3 Relativistische Geschwindigkeitsaddition

$\mathbf{u}' = (u_1', u_2', u_3')$ sei die Geschwindigkeit eines Massenpunktes in K', das sich wie oben relativ zu K bewege. Aus der Lorentz-Transformation folgt, dass die Geschwindigkeit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ des Massenpunkts in K durch

$$u_1 = \frac{u_1 + v}{1 + \frac{u_1' v}{c^2}}, \quad u_2 = \frac{u_2'}{\gamma(1 + \frac{u_1' v}{c^2})}, \quad u_3 = \frac{u_3'}{\gamma(1 + \frac{u_1' v}{c^2})}$$

gegeben ist (**relativistische Geschwindigkeitsaddition**).

6.2.4 Relativistische Massenzunahme

Damit der durch $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ definierte Impuls auch in der speziellen Relativitätstheorie bei Stoßprozessen erhalten bleibt, muss die Masse m mit der Geschwindigkeit $u = |\mathbf{u}|$ des Massenpunktes gemäß

$$m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

zunehmen. m_0 ist die Ruhemasse des Massenpunktes. Für kleine Geschwindigkeiten $u \ll c$ können wir die Wurzel entwickeln ($x = v/c \ll 1$):

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) .$$

Damit gilt

$$m(u)c^2 \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0u^2 \, .$$

Der zweite Term der rechten Seite ist die aus der Newtonschen Mechanik bekannte kinetische Energie des Massenpunktes. Nach Einstein ist sie (bis auf die Konstante m_0c^2) eine für kleine Geschwindigkeiten gültige Näherung der **relativistischen Energie**

$$E = m(u)c^2 \, .$$