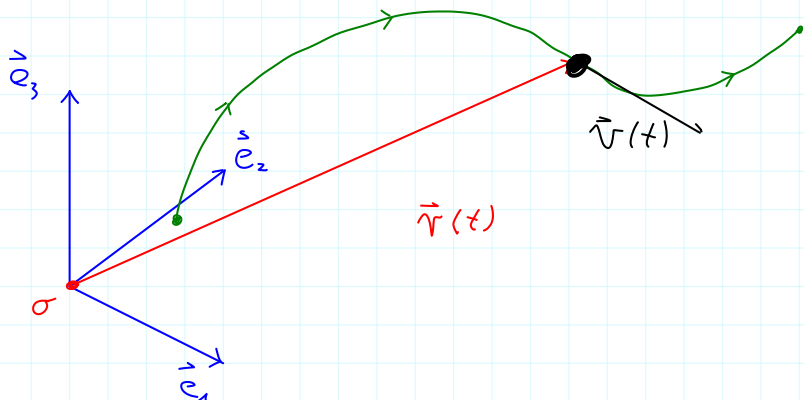


Wiederholung Kap VII.2

Thema: Bahn eines Massenpcts. / Teilchens im Raum



Basis
 $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_d)$

$\hat{=}$ Abbildung/Fkt.

$$\begin{aligned} \vec{r} &: [t_0, t_1] \rightarrow V \\ \equiv \quad t &\mapsto \vec{r}(t) = \sum_{i=1}^d x_i(t) \vec{e}_i = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}_B \end{aligned}$$

$\rightarrow$ (momentane) Geschwindigkeit:

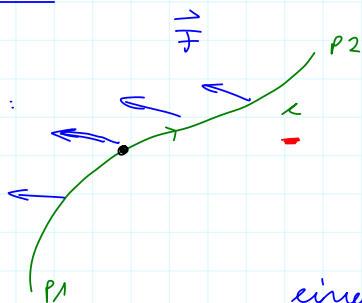
$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^d \dot{x}_i(t) \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}_B \\ &= \frac{1}{\delta t} (\vec{r}(t+\delta t) - \vec{r}(t)) \quad , \delta t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ (momentane) Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \dot{\vec{v}}(t) \\ &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \sum_{i=1}^d \ddot{x}_i(t) \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}_B \\ &= \frac{1}{\delta t} (\vec{v}(t+\delta t) - \vec{v}(t)) \end{aligned}$$

Weg, Wegintegral (Kurvenintegral), Bogenlänge, Vektorfeld

Abkürzung:



Teilen werden längs

Weg γ von P_1 nach P_2
bewegt, unter Wirkung
einer Kraft $\vec{F}$; welche Arbeit W
muss verrichtet?

$$W = - \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{x} = ?$$

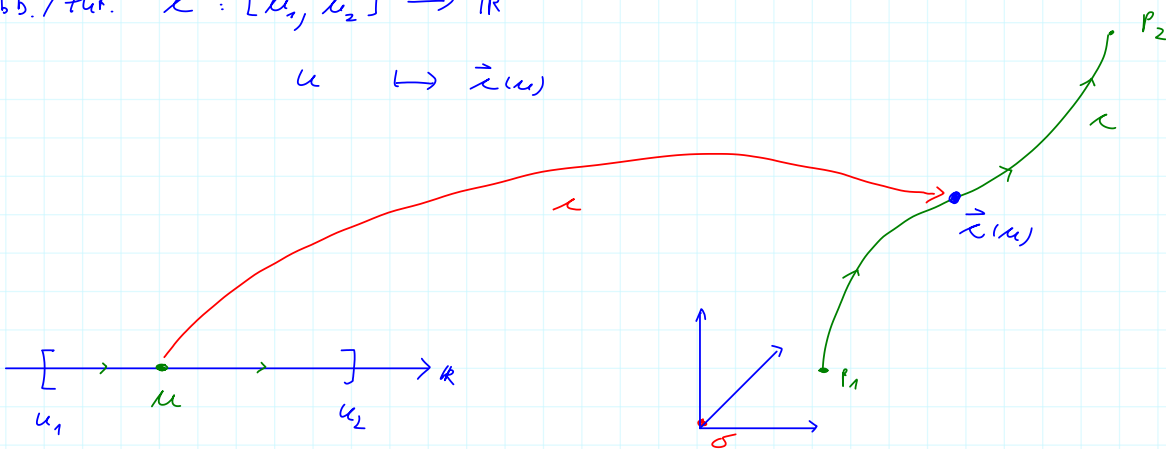
Weg γ im Raum $\mathbb{R}^3$:

($\equiv$ Kurve)

gegeben durch Parametrisierung =

Abb./Fkt. $\gamma : [\mu_1, \mu_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mu \mapsto \vec{\gamma}(\mu)$$

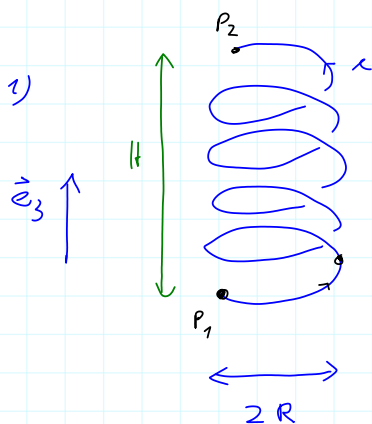


$$\vec{OP_1} = \vec{\gamma}(\mu_1)$$

$$\vec{OP_2} = \vec{\gamma}(\mu_2)$$

Beispiele:

"Schraubenweg"



n Windungen

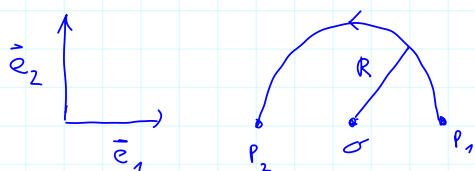
Radius R

Höhe H

$$\gamma: [0, 2\pi n] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \mapsto \begin{pmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ \frac{H}{2\pi n} u \end{pmatrix} = \vec{\gamma}(u)$$

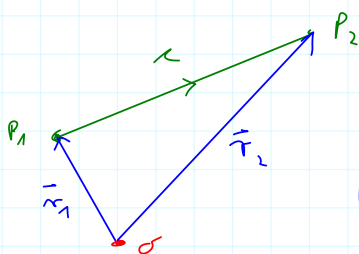
2) Halbkreis:



$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \mapsto \begin{pmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\gamma}(u)$$

3) Gerade von $P_1 \rightarrow P_2$



$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

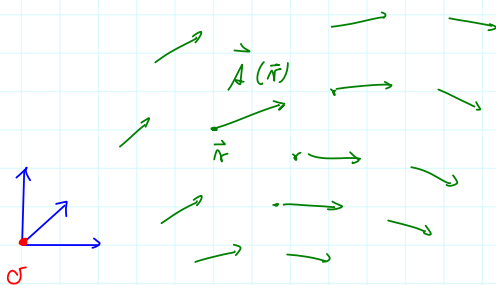
$$u \mapsto \vec{\gamma}(u) = \vec{r}_1 + u \vec{s}$$

$$\vec{P_1 P_2} = \vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Vektorfeld: (z.B. ein Kraftfeld, elektr. Feld, Gravitationsfeld, ...)

$\hat{=}$ Abb. $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{r} \mapsto \vec{A}(\vec{r})$$



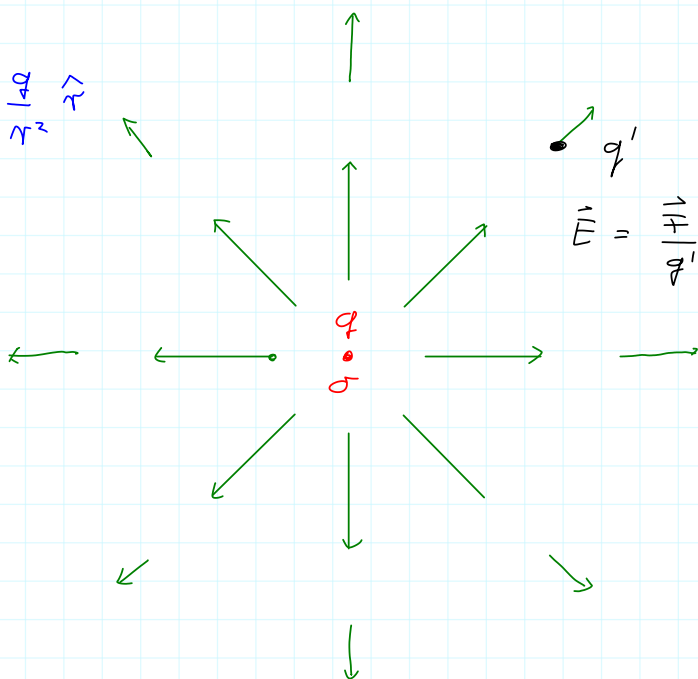
Beispiel: elektr. Feld einer Punktladung q im σ :

$$\vec{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r} \mapsto \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$\hat{r} := \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

$$r = \|\vec{r}\|$$

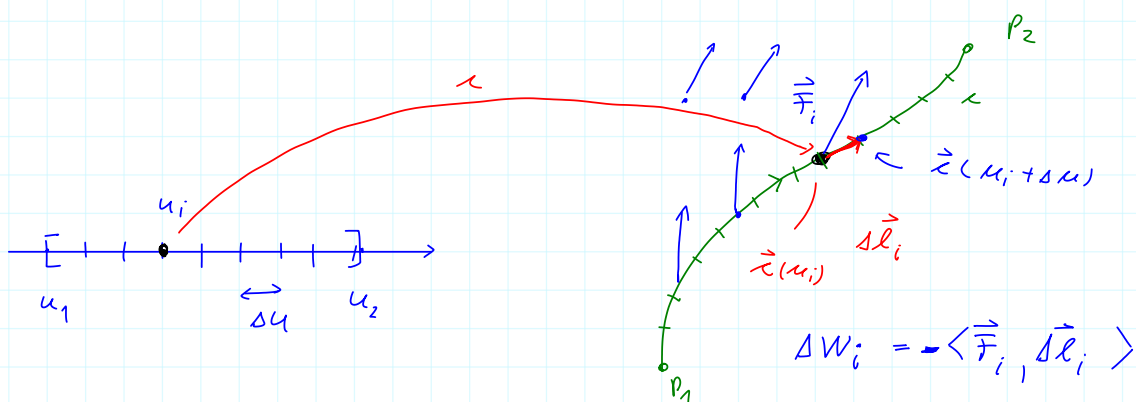


Definition des Wegintegrals motiviert durch Arbeit W die nötig ist um Teilchen im Kraftfeld $\vec{F}$ längs

Weg γ von p_1 nach p_2 zu bewegen: W

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$$



$$W = \sum_{i=1}^N \Delta W_i = - \sum_{i=1}^N \langle \vec{F}_i, \Delta \vec{l}_i \rangle = - \sum_{i=1}^N \langle \vec{F}_i, \vec{\gamma}'(u_i) \rangle \Delta u_i$$

mit: $\vec{F}_i = \vec{F}(\vec{\gamma}(u_i))$; $\Delta \vec{l}_i = \vec{\gamma}(u_i + \Delta u) - \vec{\gamma}(u_i)$

$$= \underbrace{\frac{1}{\Delta u} (\vec{\gamma}(u_i + \Delta u) - \vec{\gamma}(u_i))}_{\Delta u \rightarrow 0} \Delta u$$

$$\stackrel{!}{=} \vec{\gamma}'(u_i) \equiv \frac{d}{du} \vec{\gamma}(u_i)$$

γ

$$= \vec{\gamma}'(u_i) \Delta u$$

$$\leadsto W = - \sum_{i=1}^N \langle \vec{F}(\vec{r}(u_i)), \vec{r}'(u_i) \rangle \Delta u$$

$$\stackrel{\substack{\equiv \\ \uparrow \\ \Delta u \rightarrow 0}}{=} - \int_{u_1}^{u_2} \langle \vec{F}(\vec{r}(u)), \vec{r}'(u) \rangle du$$

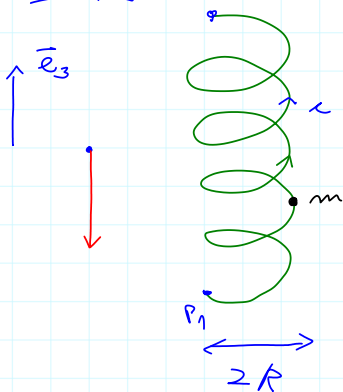
Definition:

Das Wegintegral des Vektorfelds $\vec{A}$ längs des Weges γ ist

$$\int_{\gamma} \vec{A} d\vec{l} := \int_{u_1}^{u_2} \langle \vec{A}(\vec{r}(u)), \vec{r}'(u) \rangle du,$$

wobei $\gamma: [u_1, u_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung des Weges γ ist.

Beispiel: P_2



$$\vec{F}(\vec{r}) = -mg \vec{e}_3$$

$$(g = 10 \text{ m/s}^2)$$

Teilchen bewegt sich längs Weg γ unter Wirkung der Schwerkraft bewegt:

$$W = - \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{l}$$

$$\gamma: [0, 2\pi n] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u \mapsto \vec{r}(u) = \begin{pmatrix} R \cos u \\ R \sin u \\ \frac{H}{2\pi n} \cdot u \end{pmatrix}$$

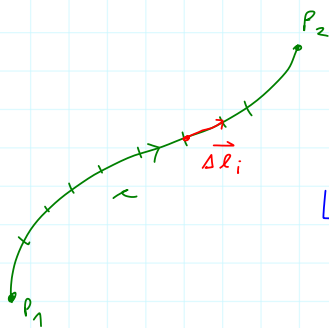
$$\vec{r}'(u) = \begin{pmatrix} -R \sin u \\ R \cos u \\ H/2\pi n \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{F}(\vec{r}(u)), \vec{r}'(u) \rangle = -mg H/2\pi n \quad (*)$$

$$-mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -mg \vec{e}_3$$

$$\begin{aligned} \rightarrow W &= - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{Def}}{=} - \int_0^{2\pi m} (L - mgy \frac{H}{2\pi m}) du \\ &= + mgy H \end{aligned}$$

Bogenlänge (= Länge) eines Weges γ



Länge des Weges γ

$$\begin{aligned} L(\gamma) &:= \sum_{i=1}^N \|\Delta \vec{r}_i\| \\ &= \sum_{i=1}^N \|\vec{r}'(u_i)\| \Delta u \\ \uparrow \\ \Delta \vec{r}_i &= \vec{r}'(u_i) \cdot \Delta u \end{aligned}$$

$$\rightarrow L(\gamma) = \int_{\gamma} \|d\vec{r}\| \equiv \int_{\gamma} dl := \int_{u_1}^{u_2} \|\vec{r}'(u)\| du$$

Bsp.: Länge des Schraubenwegs γ :

$$\|\vec{r}'(u)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -R \sin u \\ R \cos u \\ H/2\pi m \end{pmatrix} \right\|^2 = R^2 + \left(\frac{H}{2\pi m} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow L(\gamma) &= \int_0^{2\pi m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi m} \right)^2} du \\ &= \sqrt{(2\pi R m)^2 + H^2} \end{aligned}$$

Test: $H=0, u=1$: $2\pi R \stackrel{?}{=} \sqrt{(2\pi R)^2 + 0^2}$ ✓