Wdhlg.:

- <u>partielle Ableitung</u> von $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

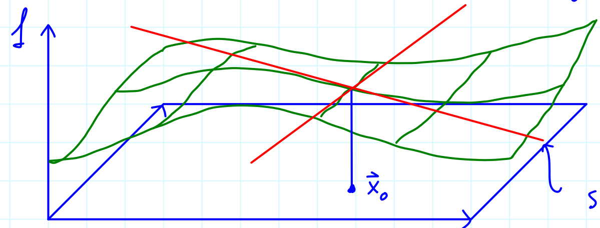
$$\vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \text{" Ableitung von } f(x_1 \ldots, x_i, \ldots x_n) \text{ nach } x_i, \text{ dabei } x_{j \neq i} \text{ konstant "}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(\vec{x} + h\,\vec{e}_i) - f(\vec{x}) \right)$$

$$= \frac{d}{du} f(\vec{x} + u\,\vec{e}_i) \Big|_{u=0} = \ldots$$

$n = 2$



- <u>Gradient</u> von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $\vec{x}_0$:

$$\boxed{\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \cdot \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) \\ \vdots \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f(\vec{x}_0)}$$

<u>Nabla-Op.</u> $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ lineare Näherung von f in $\vec{x}_0$:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{h} \rangle + \mathcal{O}(\|\vec{h}\|^2)$$

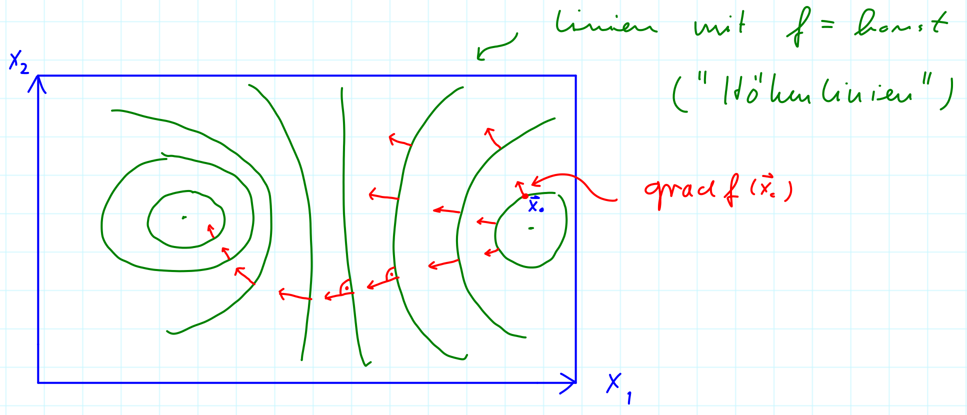
geometrische Bedeutung des Gradienten:

1) $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)$ ist parallel zur Richtung $\hat{n}_0$ des stärksten Anstiegs von f in $\vec{x}_0$

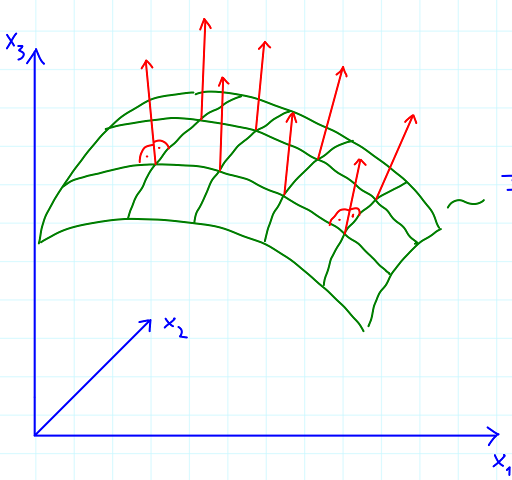
2) $\|\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\|$ = Steigung von f in Richtung $\hat{n}_0$

3) $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \perp$ zur Niveau-Fläche von f in $\vec{x}_0$

$n = 2$:



$n = 3$



$\sim F_a = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) \overset{!}{=} a\}$

"Niveau-Fläche $f = a$"

zu 1)

betrachte $f(\vec{x}_0 + \varepsilon \hat{n}) = f(\vec{x}_0) + \varepsilon \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \hat{n} \rangle + \cancel{o(\varepsilon)}$

$\varepsilon \ll 1$

Richtung $\|\hat{n}\| = 1$ lin. Näherung

$\rightarrow \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \hat{n} \rangle$ maximal für

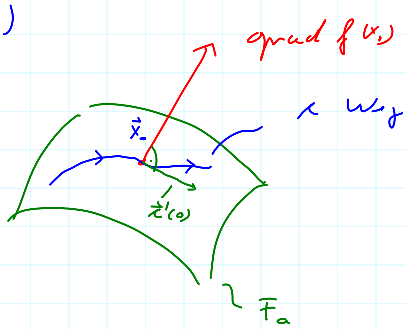
$$\hat{n} = \hat{n}_0 = \frac{\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)}{\|\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\|} \qquad (*)$$

zu 2)

$$f(\vec{x}_0 + \varepsilon \hat{n}_0) = f(\vec{x}_0) + \varepsilon \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \hat{n}_0 \rangle$$

$$\overset{(*)}{=} f(\vec{x}_0) + \varepsilon \|\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\| \quad \checkmark$$

zu 3)



c Weg in F_a: $c : [u_1, u_2] \rightarrow F_a \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in [u_1, u_2]$

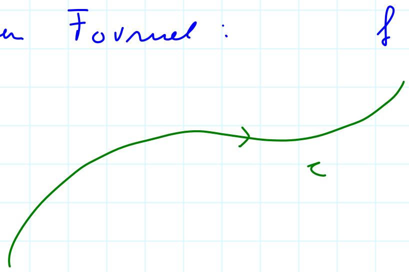
$u \mapsto \vec{c}(u)$

gelte $\vec{c}(0) = \vec{x}_0$

zu zeigen: für beliebigen Weg c in F_a mit $\vec{c}(0) = \vec{x}_0$

gilt $\vec{v} := \vec{c}\,'(0) \perp \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)$!

benötigen Formel:



$h \rightarrow 0$

$$\boxed{\frac{d}{du} f(\vec{c}(u))} = \frac{1}{h}\Big(\underbrace{f(\vec{c}(u+h))}_{f(\vec{c}(u) + \vec{c}\,'(u)\cdot h)} - f(\vec{c}(u)) \Big)$$

$$f(\vec{c}(u) + \vec{c}\,'(u)\cdot h) = f(\vec{c}(u)) + \langle \operatorname{grad} f(\vec{c}(u)), \vec{c}\,'(u)\, h \rangle$$

$$\boxed{= \langle \operatorname{grad} f(\vec{c}(u)), \vec{c}\,'(u) \rangle} \qquad (*)$$

c sei Weg in F_a , $\vec{c}(0) = \vec{x}_0$, $\vec{c}\,'(0) = \vec{v}$

$\rightarrow \quad f(\vec{c}(u)) = a$ konstant !

$$\rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} \frac{d}{du} f(\vec{c}(u))\Big|_{u=0}$$

$$\overset{(*)}{=} \langle \operatorname{grad} f(\underbrace{\vec{c}(0)}_{= \vec{x}_0}), \underbrace{\vec{c}\,'(0)}_{\vec{v}} \rangle$$

d.h. $\vec{v} \perp \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)$ ✓

<u>Rechenregeln</u> $\quad f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(i) $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$

(ii) $\operatorname{grad}(\lambda f) = \lambda \operatorname{grad} f$

(iii) $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + (\operatorname{grad} f)\, g$

(iv) $\operatorname{grad}(f/g) = \dfrac{(\operatorname{grad} f)\, g - f \operatorname{grad} g}{g^2}$

(v) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(\|\ldots\|) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\vec{x} \mapsto h(\|\vec{x}\|)$

$$\boxed{\operatorname{grad} h(\|\vec{x}\|) = h'(\|\vec{x}\|) \cdot \hat{x} \quad , \quad \hat{x} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}}$$

(vi) Weg $c : [u_1, u_2] \to \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{du}(f \circ c)(u) = \langle \operatorname{grad} f(\vec{c}(u)), \vec{c}\,'(u) \rangle$$

zu (v): $\quad \operatorname{grad} \|\vec{x}\| = ?$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \|\vec{x}\| = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2 + \dots x_n^2}$$

$$= \frac{\cancel{2}\, x_i}{\cancel{2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2 + \dots x_n^2}} = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|} \quad (*)$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{grad} \|\vec{x}\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial \|\vec{x}\|}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \|\vec{x}\|}{\partial x_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \hat{x}$$

$$\operatorname{grad} \|\vec{x}\| = \hat{x}$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{grad} h(\|\vec{x}\|) = ?$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h(\|\vec{x}\|) = h'(\|\vec{x}\|) \cdot \frac{\partial \|\vec{x}\|}{\partial x_i} = h'(\|\vec{x}\|) \frac{x_i}{\|\vec{x}\|} = \frac{h'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|} x_i$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{grad} h(\|\vec{x}\|) = h'(\|\vec{x}\|) \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = h'(\|\vec{x}\|) \cdot \hat{x}$$

Differenzial und Gradient

Differenzial der Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (allg. $\to \mathbb{R}^m$)
im Punkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

:= lineare Abb. $df_{\vec{x}_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{h} \mapsto df_{\vec{x}_0}(\vec{h})$ derart, dass

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) \overset{!}{=} f(\vec{x}_0) + df_{\vec{x}_0}(\vec{h}) + \sigma(\|\vec{h}\|^2)$$

„das Differenzial $df_{\vec{x}_0}$ ist die lineare Näherung von f im $\vec{x}_0$"

Vergleich:

$$\sigma(\|h\|) + f(\vec{x}) + \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}), \vec{h} \rangle = f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + df_{\vec{x}}(\vec{h}) + \sigma(\|h\|)$$

$$\to \quad df_{\vec{x}}(\vec{h}) = \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}), \vec{h} \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\, h_i$$

Bsp: i-te Koordinatenfkt. $x_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_i$$

$dx_{i\,\vec{x}}(\vec{h}) = ?$

$$(\vec{x} + \vec{h})_i = x_i + h_i \overset{!}{=} x_i + dx_{i\,\vec{x}}(\vec{h})$$

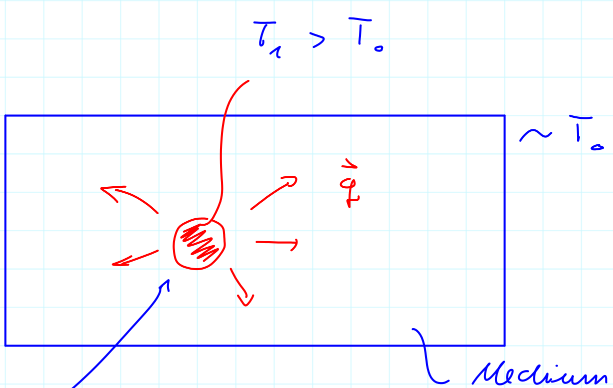
$$\to \quad dx_i(\vec{h}) = h_i$$

d.h.: $$df_{\vec{x}}(\vec{h}) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\, \overset{dx_i(\vec{h})}{\overset{\|}{h_i}} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\, dx_i(\vec{h})$$

$$\to \quad \boxed{df_{\vec{x}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\, dx_i}$$

Gradient in der Physik:

Bsp. 1) Wärmeleitung:



qualitativ:

"Wärme strömt von Quelle zum Rand"

quantitativ: ? ortsabhängige Temperatur:

"Temperaturfeld": $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\vec{r} \longmapsto T(\vec{r})$$

Wärmestromdichte = VF $\vec{q} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{r} \longmapsto \vec{q}(\vec{r})$$

$$T \overset{?}{\longleftrightarrow} \vec{q}$$

phänomenologische Gesetz:

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T \qquad !$$

Wärmeleitfähigkeit

Bsp 2) Elektrostatik: – elektr. Feld $\vec{E}(\vec{r})$

– elektr. Potenzial $\varphi(\vec{r})$?

$$\vec{E} \overset{!}{\underset{\text{Def.}}{=}} -\operatorname{grad} \varphi$$

Skalarfeld, Potenzial eines Vektorfelds, konservatives Vektorfeld

Skalarfeld = Abb. $u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{x} \longmapsto u(\vec{x})$$

Potenzial eines VFes

Skalarfeld u ist ein Potenzial des VFs $\vec{A}$ g.d.w.

$$\boxed{\vec{A} = - \operatorname{grad} u}$$

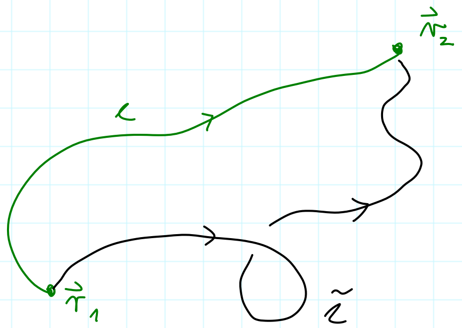
⚠ nicht alle VFe besitzen ein Potenzial!

Konservatives Vektorfeld

Ein Vf. $\vec{A}$ ist konservativ, wenn es ein Potenzial besitzt.

Satz: konservatives Vf $\vec{A}$ mit Potenzial U;

Weg c von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$



dann gilt:

$$\int_c \vec{A}\, d\vec{l} \overset{!}{=} U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$

$$\parallel$$

$$\int_{\tilde{c}} \vec{A}\, d\vec{l}$$

„Wegintegral im konservativen Vf ist wegunabhängig!“