

letzte Vorlsg.:

Gradient:

⋮

- $\text{grad } h(\|\vec{x}\|) = h'(\|\vec{x}\|) \hat{x}$

- $\frac{d}{du} f \circ \vec{z}(u) = \langle \text{grad } f(\vec{z}(u)), \vec{z}'(u) \rangle$

- Skalarfeld: $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ [z.B. -Temperatur $T(\vec{r})$
 $\vec{x} \mapsto U(\vec{x})$ - elekt. Pot. $\phi(\vec{r})$
⋮ ┘

- Skalarfeld U ist Potenzial des Vfs $\vec{A}$

: $\Leftrightarrow$ $\vec{A} = -\text{grad } U$

[z.B. $\lambda T(\vec{r})$ Potenzial der

Wärmestromdichte: $\vec{q} = -\lambda \text{grad } T(\vec{r})$]

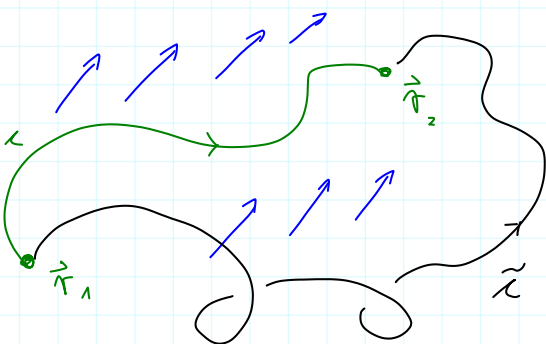
- Vf. $\vec{A}$ konservativ

: $\Leftrightarrow$ $\vec{A}$ besitzt ein Potenzial:

$$\vec{A} = -\text{grad } U$$

- $\vec{A}$ konservatives Vf. mit Potenzial U ,
 γ Weg von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$

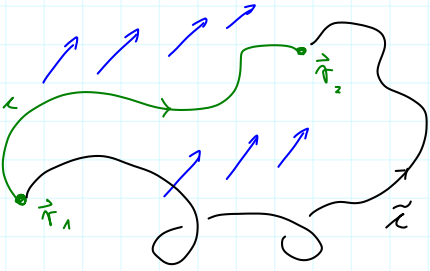
$$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{A} d\vec{l} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \quad (*)$$



$$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{A} d\vec{l} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} d\vec{l}$$

"Wegunabhängigkeit
des Wegintegrals"

$$\rightarrow \int_{\gamma} \vec{A} d\vec{r} = u(\vec{r}_1) - u(\vec{r}_2) \quad (*)$$



Beweis von (*):

- $U_{\text{reg}} \subset \mathbb{R}^n$ mit Parameter. $\gamma: [u_1, u_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $u \mapsto \vec{r}(u)$
 $\vec{r}(u_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}(u_2) = \vec{r}_2$

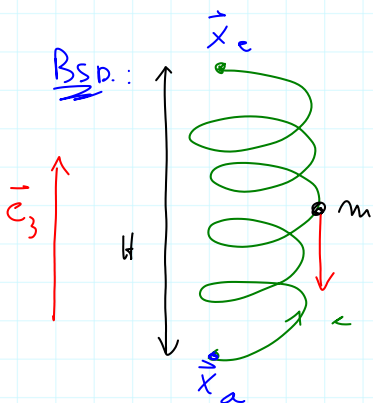
- haus. Vf $\vec{A}$ mit Potential $V: \vec{A} = -\text{grad } V$

$$\rightarrow \int_{\gamma} \vec{A} d\vec{r} = \int_{u_1}^{u_2} \underbrace{\langle \vec{A}(\vec{r}(u)), \vec{r}'(u) \rangle}_{\parallel -\text{grad } V(\vec{r}(u))} du$$

$$= - \int_{u_1}^{u_2} \underbrace{\langle \text{grad } V(\vec{r}(u)), \vec{r}'(u) \rangle}_{\parallel \frac{d}{du} V(\vec{r}(u))} du$$

$$= - \int_{u_1}^{u_2} \frac{d}{du} V(\vec{r}(u)) du = V(\underbrace{\vec{r}(u_1)}_{\vec{r}_1}) - V(\underbrace{\vec{r}(u_2)}_{\vec{r}_2})$$

$$= V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$



"Schwabenweg" im Schwebefeder:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -mg \vec{e}_3, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

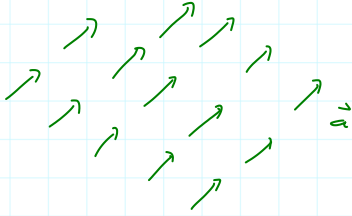
$$W = - \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = u(\vec{x}_a) - u(\vec{x}_e) = mgH !$$

$\vec{F}$ konservativ mit Potential $u(\vec{x}) = mgx_3$ ✓

Γ denn $-\text{grad } U(\vec{x}) = -mg \text{ grad } x_3 = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -mg \vec{e}_3$
 $= \vec{F}(\vec{x}) !$

Beispiele konservative V.f.:

1) konstantes V.f.: $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{a}$



$\Gamma \vec{x} \rightarrow x_3 ?$

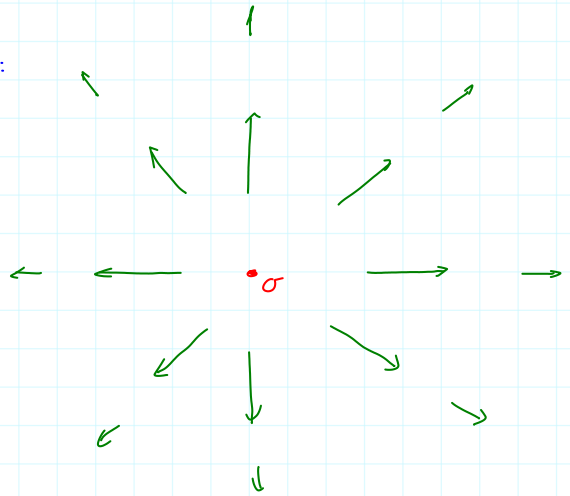
$x_3 = \langle \vec{e}_3, \vec{x} \rangle$

Potenzial $U(\vec{x}) = -\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = -\sum_{i=1}^n a_i x_i$

$\Gamma \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} = -a_i \rightarrow \text{grad } U(\vec{x}) = -\vec{a} \checkmark$

2) isotropes Zentralfeld:

$\vec{A}(\vec{x}) = f(\|\vec{x}\|) \hat{x}$



$F(x)$ sei Stammfkt
von $f(x)$

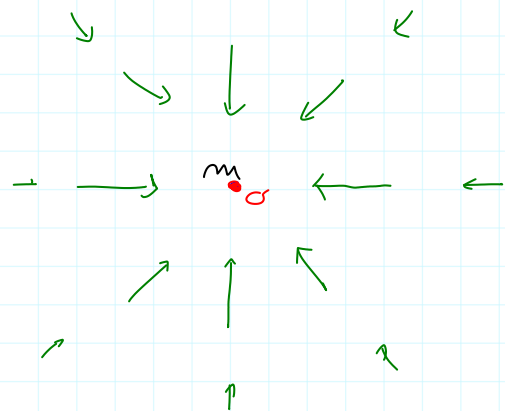
$\Gamma F'(x) = f(x)$

2.1. $F(x) = \int_{x_0}^x f(\vec{x}) d\vec{x}$

$\rightarrow$ Potenzial $U(\vec{x}) = -F(\|\vec{x}\|)$

Γ denn: $-\text{grad } U(\vec{x}) = \text{grad } F(\|\vec{x}\|) = f(\|\vec{x}\|) \hat{x} = \vec{A}(\vec{x})$
 $\text{grad } h(\|\vec{x}\|) = h'(\|\vec{x}\|) \hat{x}$

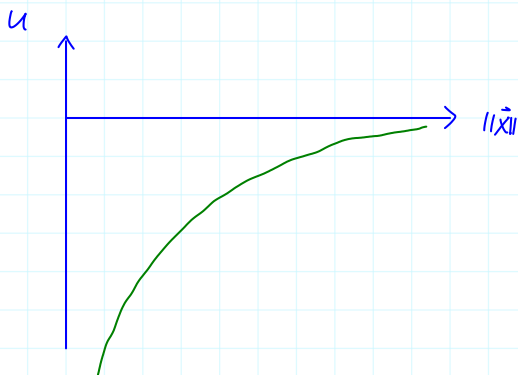
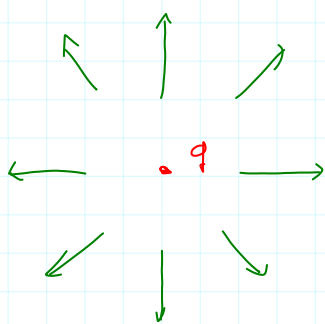
2a)

Gravitationsfeld $\vec{G}(\vec{r})$ einer Pt. masse m in σ :

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\gamma \frac{m}{\|\vec{r}\|^2} \hat{r}$$

$$\left(\vec{G}(\vec{x}) = -\gamma \frac{m}{\|\vec{x}\|^2} \hat{x} \right)$$

$$\rightarrow \text{Grav.-Pot. : } U(\vec{x}) = -\gamma m \frac{1}{\|\vec{x}\|}$$

2b) elektr. Feld $\vec{E}(\vec{r})$ einer Pt. lsg. q in σ :

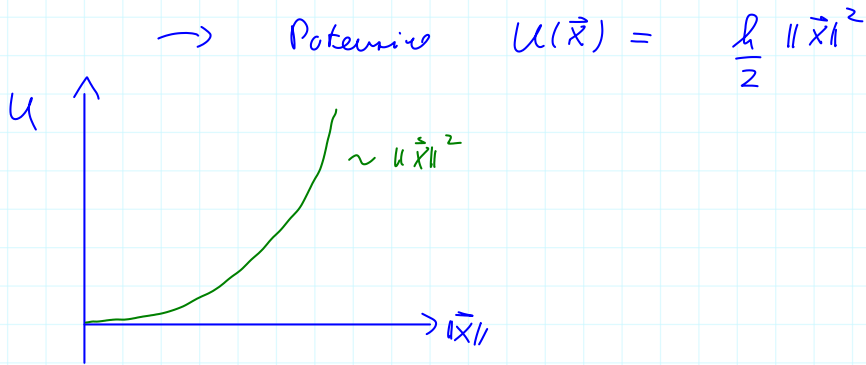
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{r}\|^2} \hat{r}$$

$$\left(\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{x}\|^2} \hat{x} \right)$$

$$\rightarrow \text{elect. Pot. : } \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{x}\|}$$

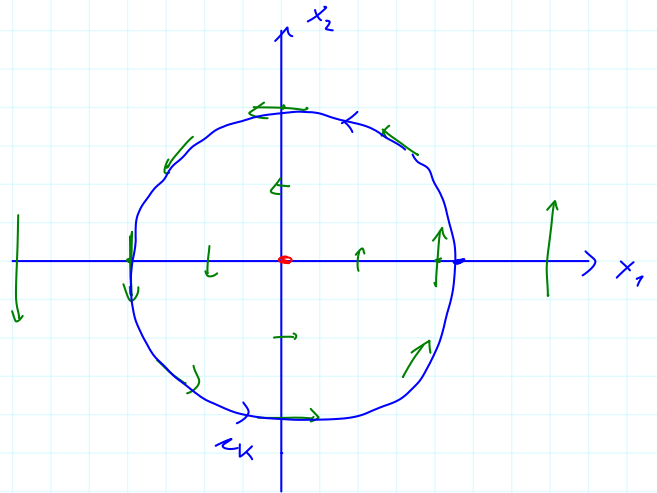


2): linear $\Rightarrow$ Unyktfeld: $\vec{F}(\vec{x}) = -h \vec{x}$
 $= -h \|\vec{x}\| \hat{x}$



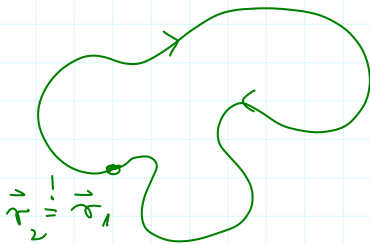
3): V.f. $\vec{A} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\int_{\text{geschl. Weg}} \vec{A} d\vec{l} \neq 0 \Rightarrow \vec{A}$
nicht
 konservativ!



Bemerkung:

$\vec{A}$ konservativ $\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{A} d\vec{l}$ längs geschlossenen
 Weg γ verschwindet!



$\rightarrow \int_{\gamma} \vec{A} d\vec{l} = U(\vec{n}_1) - U(\vec{n}_2) = 0!$

Wir zeigen:

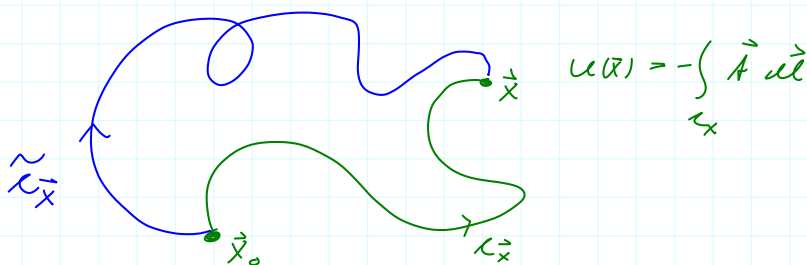
$\vec{A}$ konservativ $\Leftrightarrow$ für jeden geschlossenen Weg γ ist

$$\int_{\gamma} \vec{A} d\vec{e} = 0$$

" $\Rightarrow$ " ✓

" $\Leftarrow$ " : Beh.: $\underline{U(\vec{x})} := \ominus \int_{\gamma_{\vec{x}}} \vec{A} d\vec{e}$ Potenzial von $\vec{A}$ ist!

$\gamma_{\vec{x}}$: beliebigen Weg von $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}$



wohldefiniert? $\checkmark$ z.z.: $\int_{\gamma_{\vec{x}}} \vec{A} d\vec{e} \stackrel{!}{=} \int_{\tilde{\gamma}_{\vec{x}}} \vec{A} d\vec{e}$ (*)

betrachte geschlossenen Weg $\gamma = \gamma_{\vec{x}} + (-\tilde{\gamma}_{\vec{x}})$

nach Voraussetzung: $0 = \int_{\gamma} \vec{A} d\vec{e} = \int_{\gamma_{\vec{x}}} \vec{A} d\vec{e} \ominus \int_{\tilde{\gamma}_{\vec{x}}} \vec{A} d\vec{e}$

$\rightarrow (*) \checkmark$

$U(\vec{x})$ Potenzial von $\vec{A}$? $\checkmark$

$\lim$ Näherung
 für $\varepsilon \ll 1$: $U(\vec{x} + \varepsilon \hat{n}) = U(\vec{x}) + \varepsilon \langle \operatorname{grad} U(\vec{x}), \hat{n} \rangle + o(\varepsilon)$

$\Leftrightarrow - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x} + \varepsilon \hat{n}} \vec{A} \cdot d\vec{e} = - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{A} \cdot d\vec{e} - \langle \vec{A}(\vec{x}), \varepsilon \hat{n} \rangle$

$$\rightarrow \langle \operatorname{grad} U(\vec{x}), \hat{n} \rangle = - \langle \vec{A}(\vec{x}), \hat{n} \rangle$$

da $\hat{n}$ beliebig gewählt folgt $\operatorname{grad} U(\vec{x}) = - \vec{A}(\vec{x})$ ✓

$\rightarrow$ lokale notwendige Bedingung für Konservativität!

Höhere partielle Ableitungen, Satz von Schwarz

$$\rightarrow f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$\vec{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$

$\rightarrow$ 2. partielle Ableitung von f nach x_i und x_j :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}) := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(\vec{x})$$

Notation:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Bsp: $f(x_1, x_2) = \underline{x_1^3} \sin^2 x_2$

1. part. Abl. en:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 \sin^2 x_2$$

2. part. Abl. en:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}: \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_1 \sin^2 x_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \underline{6x_1^2 \sin x_2 \cos x_2} \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1^3 \sin x_2 \cos x_2 \left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}: \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \underline{6x_1^2 \sin x_2 \cos x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2x_1^3 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2} \sin x_2 \cos x_2}_{(\cos^2 x_2 - \sin^2 x_2)} \end{array}$$

Satz von Schwarz

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

2 mal stetig diff'bar
("hin und her geht")

dann gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

→ für conservative V.f. $\vec{A} = -\text{grad } u = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A_i = -\frac{\partial u}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$A_j = -\frac{\partial u}{\partial x_j} \quad \uparrow \quad = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

S.v. Sch.

$$\vec{A} \text{ konservativ} \Rightarrow \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$

notwendiges Kriterium

für Konservativität!

$\vec{A}$ konservativ

$\Leftrightarrow$ es ex. Potenzial $U: \vec{A} = - \text{grad } U$

$$\Leftrightarrow \int_C \vec{A} d\vec{b} = 0 \quad \text{für bel. geschl. Weg } C$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n$$