
Mathematik für Studierende der Physik – Blatt 1

Sommersemester 2025

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/maphy2_25.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250436.html

Abgabe: Montag, den 21.04.2025, 23:59 Uhr

0. Zur Diskussion

0 Punkte

- a) Was ist ein Vektorraum?
- b) Was ist die Dimension eines Vektorraums?
- c) Was ist ein euklidischer Vektorraum?
- d) Die zwei Vektoren u und v eines euklidischen Vektorraums seien jeweils orthogonal zu einem dritten Vektor w . Zeigen Sie, dass dann auch $u + v$ orthogonal zu w ist.

1. Komponenten

3+3=6 Punkte

$B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ sei eine Basis eines reellen Vektorraums V .

- a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$c_1 = b_1, \quad c_2 = b_1 + b_2, \quad c_3 = b_1 + b_2 + b_3, \quad c_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

ebenfalls eine Basis von V bilden.

- b) u_1, u_2, u_3, u_4 seien die Komponenten eines Vektors $u \in V$ bzgl. der Basis $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$. Wie lauten die Komponenten dieses Vektors bzgl. Basis B ?

2. Ganzrationale Funktionen

4+5+5=14 Punkte

P_3 sei der Vektorraum der reellen, ganzrationalen Funktionen maximal 3. Grades. Eine Basis des Vektorraums ist $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ mit Funktionen $b_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$b_1(x) = 1, \quad b_2(x) = x, \quad b_3(x) = x^2, \quad b_4(x) = x^3.$$

Ferner seien $f, g \in P_3$ gegeben durch

$$f(x) = x(x-2)^2, \quad g(x) = (x+1)(x-1).$$

- a) Bestimmen Sie die Komponenten von f , g , $3f$ und $f + g$ bzgl. der Basis B .
- b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $c_1, c_2, c_3, c_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$c_1(x) = 1, \quad c_2(x) = 1 + x, \quad c_3(x) = 1 + x + x^2, \quad c_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

ebenfalls eine Basis von P_3 bilden. Wie lauten die Komponenten von f , g , $3f$ und $f + g$ bzgl. dieser Basis?

c) Wir betrachten folgende Teilmengen von P_3 :

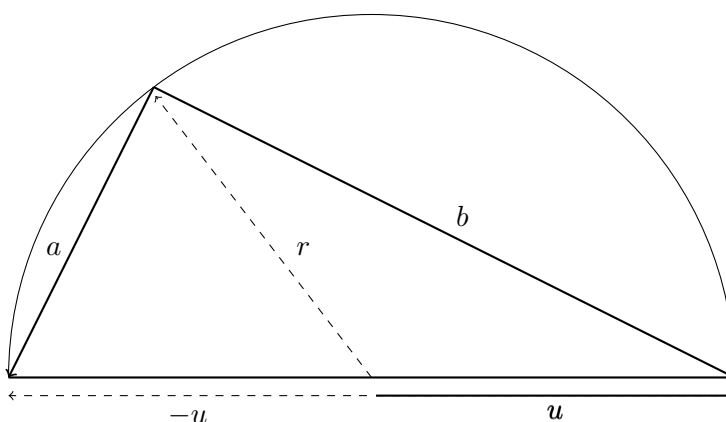
$$\begin{aligned} M_1 &= \{f \in P_3 \mid f(1) = 0\}, & M_2 &= \{f \in P_3 \mid f(0) = 1\}, & M_3 &= \{f \in P_3 \mid f(0) = f(1)\}, \\ M_4 &= \{f \in P_3 \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}, & M_5 &= \{f \in P_3 \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)\}, \\ M_6 &= M_4 \cap M_5, & M_7 &= M_1 \cap M_4. \end{aligned}$$

Welche dieser Teilmengen bilden mit Addition und Skalarmultiplikation wie in P_3 einen Vektorraum? Bestimmen Sie ggf. die Dimension.

3. Satz des Thales

4 Punkte

Ein Dreieck ist wie in der Skizze einem Halbkreis eingeschrieben. Nach dem Satz des Thales ist ein so konstruiertes Dreieck immer ein rechtwinkliges Dreieck. Beweisen Sie diesen Satz mittels des Skalarprodukts. Hinweis: Stellen Sie die Kantenvektoren a und b durch die Vektoren u und r dar und beachten Sie, dass $|u| = |r|$.



4. Parallelogramm

3+3=6 Punkte

- A und B seien die Kantenlängen eines Parallelogramms, E und F die Längen seiner Diagonalen. Zeigen Sie, dass $E^2 + F^2 = 2(A^2 + B^2)$.
- Zeigen Sie, dass sich die Diagonalen eines gleichseitigen Parallelogramms ($A = B$) immer im rechten Winkel schneiden.