
Mathematik für Studierende der Physik – Blatt 10

Sommersemester 2025

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/maphy2_25.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250436.html

Abgabe: Montag, den 30.06.2025, 23:59 Uhr

51 Zur Diskussion

Wie sind die direkte Summe und das Tensorprodukt zweier Vektorräume definiert? Was sind die Dimensionen dieser Räume?

52 Orthogonale Eigenvektoren

3 Punkte

Zeigen Sie: Eigenvektoren v_1 und v_2 zu unterschiedlichen Eigenwerten λ_1 und λ_2 eines hermiteschen Operators A sind orthogonal zueinander.

53 Zerlegung

3 Punkte

Ein beliebiger Operator A eines unitären Vektorraums kann mit *hermiteschen* Operatoren B und C durch

$$A = B + iC$$

dargestellt werden. [Hinweis: offenbar ist $A = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) + \frac{1}{2i}(A - A^\dagger)i$.]

54 Orthogonale und unitäre Operatoren

2+2+2+2=8 Punkte

a) A und B seien zwei kommutierende hermitesche Operatoren. Zeigen Sie, dass dann

$$e^A e^B = e^{A+B}.$$

[Hinweis: gemeinsame Eigenbasis]

b) H sei ein hermitescher Operator. Zeigen Sie: e^{iH} ist ein unitärer Operator.

c) A sei eine antisymmetrische reelle $n \times n$ Matrix, d.h. $A^T = -A$. Zeigen Sie: e^A ist eine orthogonale Matrix.

d) Die Matrix

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt bekanntlich die Rotation um Drehachse e_3 mit Drehwinkel φ . R_φ ist damit orthogonal und kann nach c) mittels einer geeigneten antisymmetrischen Matrix A_φ als $R_\varphi = e^{A_\varphi}$ dargestellt werden. Wie lautet A_φ ? [Hinweis: Aufgabe 21 auf Blatt 4.]

55 Eigenvektor zum größten Eigenwert

8 Punkte

A sei ein hermitescher Operator eines unitären Vektorraums V mit nicht-negativen Eigenwerten $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass alle Eigenräume eindimensional sind. v_1 sei ein Eigenvektor zum größten Eigenwert λ_1 . Zeigen Sie:

Für einen beliebigen Vektor u mit $\langle v_1, u \rangle \neq 0$ konvergiert die Folge $f_n := A^n u / |A^n u|$ im Limes $n \rightarrow \infty$ gegen einen normierten Eigenvektor zum größten Eigenwert λ_1 , d.h. es existiert ein normierter Eigenvektor $\tilde{v}_1$ zum Eigenwert λ_1 derart, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - \tilde{v}_1| = 0.$$