Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematik für Studierende der Physik – Blatt 11

Sommersemester 2025

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/maphy2_25.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250436.html

Abgabe: Montag, den 07.07.2025, 23:59 Uhr

56 Zur Diskussion

a) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(x)\, \mathrm{e}^{-(x-\frac{\pi}{2})^2}\, \delta(x-\frac{\pi}{2})\, \mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\delta(x-1)\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\delta(\,3(x-1)\,)\mathrm{d}x.$$

b) Wie lautet die Fourierreihe von $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n)$?

57 Tensorprodukt **5 Punkte**

Die Vektoren v_1, v_2 bzw. w_1, w_2 bilden Basen zweier $\mathbb{K}$-Vektorräume V bzw. W. Zeigen Sie, dass der Vektor

$$u = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 \ \in \ V \otimes W$$

nicht als Tensorprodukut $a \otimes b$ zweier Vektoren $a \in V$ und $b \in W$ dargestellt werden kann.

58 Fourierreihe I **8 Punkte**

$f(t)$ sei eine 2π-periodische Funktion gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & : t \in]-\pi, 0] \\ 1 & : t \in]0, \pi] \end{cases},$$

und 2π-periodischer Fortsetzung außerhalb des Intervalls $]-\pi, \pi]$. Stellen Sie $f(t)$ durch eine Fourierreihe dar.

59 Fourierreihe II **3+3 = 6 Punkte**

Stellen Sie folgenden Funktionen durch Fourierreihen dar:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n-d), \qquad d \in [0,1[,$$
$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-an), \qquad a \in \mathbb{R}_+ \,.$$

60 Fourierreihe III

3+3= 6 Punkte

Auf dem Vektorraum der komplexwertigen T-periodischen Funktionen betrachten wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle \;:=\; \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^*(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

mit der dadurch induzierten Norm

$$|f| \;=\; \sqrt{\langle f, f\rangle} \;=\; \left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} .$$

a) Zeigen Sie: Sind $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ die Fourierkoeffizienten der T-periodischen Funktion $f(t)$, so gilt:

$$|f|^2 \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2 .$$

b) Beweisen Sie folgende Identität mittels **a)** und einem Resultat aus der Vorlesung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6} .$$

61 Fourierkoeffizienten

6 Punkte

$f(t)$ sei eine T-periodische Funktion. Zwei weitere T-periodische Funktionen sind dann die *Translation* von $f(t)$ um $d \in [0, T[$,

$$g(t) \;:=\; f(t-d) ,$$

und die Ableitung von $f(t)$:

$$h(t) \;:=\; f'(t) .$$

Die Funktion

$$j(t) \;:=\; f(st)$$

mit $s\in\mathbb{R}_+$ ist eine periodische Funktion mit Periode $T' = T/s$.

Zeigen Sie folgende Relationen zwischen den Fourierkoeffizienten f_n der Funktion $f(t)$ und den Fourierkoeffizienten g_n, h_n und j_n der obigen Funktionen:

$$\begin{aligned} g_n &= e^{-i\omega_n d}\, f_n \\ h_n &= i\omega_n\, f_n \\ j_n &= f_n . \end{aligned}$$