

---

## Mathematik für Studierende der Physik – Blatt 12

---

Sommersemester 2025

**Webpage:** [http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/maphy2\\_25.html/](http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/maphy2_25.html/)  
[https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto\\_uk\\_crs\\_6250436.html](https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250436.html)

**Abgabe:** Montag, den 14.07.2025, 23:59 Uhr

### 62 Zur Diskussion

- a) Wie lauten die Fouriertransformierten der Funktionen  $\delta(x - x_0)$ ,  $e^{ik_0x}$ ,  $e^{-ik_0x}$ ,  $\sin(k_0x)$  und  $\cos(k_0x)$  ?
- b) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Fouriertransformierten einer Funktion  $f(x)$  und den Fouriertransformierten von  $f(x - x_0)$  und  $f'(x)$  ?
- c) Für eine Funktion  $f$  sei eine weitere Funktion  $g$  durch  $g(x) := f(sx)$  definiert, wobei  $s$  eine reelle, positive Konstante. Zeigen Sie:

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{s} \hat{f}\left(\frac{1}{s} k\right).$$

- d) Was versteht man unter der *Faltung* zweier Funktionen? Was besagt der Faltungssatz?

### 63 Fouriertransformation

2+2+2+4=10 Punkte

Bestimmen Sie die Fouriertransformierten folgender Funktionen ( $a \in \mathbb{R}_+$ ):

$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ e^{-ax} & : x \geq 0 \end{cases}, \quad h(x) = e^{-a|x|}, \quad j(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

### 64 Wärmeleitung

4+6 =10 Punkte

Die Temperatur  $T(x, t)$  in einem homogenen eindimensionalen Wärmeleiter genügt der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Hierbei ist  $a$  die materialspezifische Temperaturleitfähigkeit. Bestimmen Sie  $T(x, t)$  für  $t > 0$  zu Anfangswerten

$$(i) \quad T_0(x) = \vartheta \cos(k_0x), \quad (ii) \quad T_0(x) = \vartheta e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}$$

bei  $t = 0$ .  $\vartheta$ ,  $k_0$  und  $\sigma_0$  sind positive Konstanten. Wie lautet in (ii) die Varianz  $\sigma(t)$  der Temperaturverteilung  $T(x, t)$  ?

## 65 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

3+3 = 6 Punkte

Die Gaußsche Wahrscheinlichkeitsverteilung der Varianz  $\sigma$  ist durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

gegeben. Die Cauchysche Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Parameter  $a \in \mathbb{R}_+$  ist definiert durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$q_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

Beide Verteilungen sind invariant unter Faltung: d.h. Die Faltung zweier Gauß-Verteilungen ergibt wieder eine Gauß-Verteilung, und die Faltung zweier Cauchy-Verteilungen ergibt wieder einen Cauchy-Verteilung. Genauer gelten folgende Relationen:

$$\begin{aligned} p_{\sigma_1} * p_{\sigma_2} &= p_{\sigma_3}, & \text{mit } \sigma_3 &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \\ q_{a_1} * q_{a_2} &= q_{a_3}, & \text{mit } a_3 &= a_1 + a_2. \end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit dieser Relationen mit Hilfe des Faltungssatzes!