Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematik für Studierende der Physik – Blatt 2

Sommersemester 2025

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/maphy2_25.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250436.html

Abgabe: Montag, den 28.04.2025, 23:59 Uhr

5. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was ist ein hermitesches Skalarprodukt?

b) Was ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung?

6. Komponenten bzgl. einer Orthonormalbasis *3+3=6 Punkte*

V sei ein komplexer Vektorraum mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle . \, , . \rangle$. $B = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ sei eine Orthonormalbasis von V.

a) Zeigen Sie, dass die Komponenten eines Vektors $u \in V$ bzgl. B gegeben sind durch $u_i = \langle e_i, u \rangle$.

b) $u_1, \ldots, u_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ seien die Komponenten zweier Vektoren $u, v \in V$ bzgl. B. Zeigen Sie, dass $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i$.

7. Orthonormalbasis *3+4+3=10 Punkte*

Wir betrachten $\mathbb{C}^2$ mit Standardskalarprodukt $\langle . \, , . \rangle$ und Basis $B = (b_1, b_2)$ gegeben durch

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \qquad ,$$

a) Zeigen Sie, dass B eine Orthonormalbasis ist.

b) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke weitmöglichst:

$$\langle b_1 + ib_2, b_1 - ib_2 \rangle, \quad \langle ib_1, b_1 \rangle + \langle b_2, ib_2 \rangle, \quad \langle \mathrm{e}^{i\varphi} b_1, \mathrm{e}^{i\varphi} b_1 \rangle, \quad \langle b_2, \mathrm{e}^{i\varphi} b_2 \rangle - \langle \mathrm{e}^{i\varphi} b_1, b_1 \rangle \qquad (\varphi \in \mathbb{R}).$$

c) Wie lauten die Komponenten der Vektoren $u = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. Basis B?

8. Dreiecksungleichungen *4 Punkte*

Für Vektoren u, v eines euklidischen oder unitären Vektorraums gelten die Dreiecksungleichungen:

$$\Big| |u| - |v| \Big| \;\leq\; |u + v| \;\leq\; |u| + |v|.$$

Leiten Sie diesen Ungleichungen aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ab.

9. Orthonormale Funktionen

4+6=10 Punkte

V sei der Vektorraum der stetigen, komplexwertigen Funktionen $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$. Ein hermitesches Skalarprodukt für V sei gegeben durch

$$\langle f, g \rangle \ := \ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x) g(x) \, dx \, .$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ seien Funktionen $e_n \in V$ definiert durch $e_n(x) \ := \ \mathrm{e}^{inx}$.

a) Zeigen Sie, dass $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ein System orthonormaler Funktionen bildet, d.h. $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$.

b) Bestimmen Sie die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos(ax)\cos(bx) \, dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos(ax)\sin(bx) \, dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin(ax)\sin(nx) \, dx,$$

für $a, b \in \mathbb{N}$ indem Sie beispielsweise $\cos(ax)$ und $\sin(bx)$ ($x \in [0, 2\pi]$) durch Linearkombinationen geeigneter Elemente aus $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ darstellen und dann **a)** ausnutzen.

10. Kinetische Energie

5 Punkte

N Teilchen der Massen $m_1, \ldots, m_N$ bewegen sich in einer Dimension mit Geschwindigkeiten $v_1, \ldots, v_N$. Die gesamte kinetische Energie der Teilchen ist damit

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \, .$$

Durch einen *boost* mit boost-Geschwindigkeit ν ändern sich die Teilchengeschwindigkeiten gemäß

$$v_i \ \to \ v_i' = v_i + \nu,$$

die kinetische Energie ändert sich demzufolge gemäß

$$E \ \to \ E' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (v_i')^2 \, .$$

Wir suchen eine relativ einfache und trotzdem allgemeingültige Beziehung zwischen E, E' und ν, und wollen dazu zeigen:

$$|\sqrt{E} - \sqrt{\tfrac{M}{2}\nu^2} \ | \ \leq \ \sqrt{E'} \ \leq \ \sqrt{E} + \sqrt{\tfrac{M}{2}\nu^2} \, ,$$

wobei $M = \sum_i m_i$ die Gesamtmasse des Systems ist. Beweisen Sie diese Relation.

Anleitung: Hilfreich ist hier das durch

$$\langle a, b \rangle_E := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, a_i b_i \tag{1}$$

definierte Skalarprodukt für den $\mathbb{R}^n$, zusammen mit der daraus folgenden Norm $|a|_E = \sqrt{\langle a, a \rangle_E}$. Nachdem Sie sich überzeugt haben, dass (1) tatsächlich ein Skalarprodukt definiert, machen Sie sich klar, dass für N-dimensionale Geschindigkeitsvektoren $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$ und $u_b = \nu(1, 1, \ldots, 1)$

$$|v|_E^2 = E, \qquad |v + u_b|_E^2 = E', \qquad |u_b|_E^2 = \frac{1}{2} M \nu^2.$$

Für das Skalarprodukt $\langle ., . \rangle_E$ gilt selbstverständlich die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, und damit gelten für die Norm $|.|_E$ auch die Dreiecksungleichungen. Was besagen diese dann für $|v + u_b|_E$?