Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematik für Studierende der Physik – Blatt 3

Sommersemester 2025

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/maphy2_25.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250436.html

Abgabe: Montag, den 05.05.2025, 23:59 Uhr

12 Zur Diskussion **0 Punkte**

a) Was ist eine lineare Abbildung?
b) Was sind Kern und Bild einer linearen Abbildung?
c) $A : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Welche Beziehung besteht zwischen den Dimensionen von V, Ker$A$ und ImA?

13 Unterräume von $\mathbb{F}_2^3$ **4+4+4=12 Punkte**

$\mathbb{F}_2$ ist der Körper über der Menge $\{0, 1\}$ mit Addition und Multiplikation gemäß

$$\begin{array}{c||cc} + & 0 & 1 \\ \hline\hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c||cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad .$$

Die Elemente von $\mathbb{F}_2^3 = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ stellen wir als dreistellige Binärzahlen dar:

$$\mathbb{F}_2^3 \;=\; \{\, b_1b_2b_3 \mid b_i \in \mathbb{F}_2 \} \;=\; \{\, 000, 001, 010, ..., 111 \,\}.$$

Mit komponentenweiser Addition $b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3 := (b_1 + c_1)(b_2 + c_2)(b_3 + c_3)$ und Skalarmultiplikation $\lambda(b_1b_2b_3) := (\lambda b_1)(\lambda b_2)(\lambda b_3)$ (mit $\lambda \in \mathbb{F}_2$) bildet $\mathbb{F}_2^3$ einen dreidimensionalen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.

a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{F}_2^3$ bilden einen Untervektorraum? Geben Sie ggf. die Dimension an.

$$U_1 = \{000\}, \quad U_2 = \{111\}, \quad U_3 = \{000, 111\}, \quad U_4 = \{000, 001, 010\}, \quad U_5 = \{000, 001, 100, 101\}.$$

b) Bestimmen Sie die Elemente und Dimensionen folgender Untervektorräume:

$$V_1 = \text{Span}\{010, 111\}, \quad V_2 = \text{Span}\{100, 011, 111\}, \quad V_3 = V_1 + V_2, \quad V_4 = V_1 \cap V_2.$$

Überprüfen Sie $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

c) Zwei Abbildungen $A, B \,:\, \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2^3$ sind gegeben durch

$$A(b_1b_2b_3) := b_3b_1b_1, \qquad B(b_1b_2b_3) := (b_1 + b_2 + b_3)00.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildungen A und B linear sind. Bestimmen Sie für A und B jeweils Kern und Bild und deren Dimensionen. Überprüfen Sie jeweils die Dimensionsformel.

14 Inverse Abbildung **4 Punkte**

$A : V \to W$ sei eine bijektive lineare Abbildung. Zeigen Sie: die inverse Abbildng $A^{-1} : W \to V$ ist ebenfalls linear und $\dim V = \dim W$.

15 Kern und Bild **6 Punkte**

Bestimmen Sie Kern und Bild folgender linearer Abbildungen:

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 + \frac{1}{2}a_2 \\ 2a_1 + a_2 \end{pmatrix}, \qquad B : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3 \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + ia_2 \\ a_1 - ia_2 \end{pmatrix}.$$

Ist A bzw. B injektiv oder surjektiv?

16 Isometrischer Endomorphismus **6 Punkte**

V sei ein euklidischer Vektorraum und $A : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender zwei Aussagen

$$(i) \quad \langle A(u), A(v)\rangle = \langle u, v\rangle \quad \text{für alle } u, v \in V$$

$$(ii) \quad |A(u)| = |u| \quad \text{für alle } u \in V$$

Gilt diese Äquivalenz auch für eine lineare Abbildung $A : U \to U$ mit *unitärem* Vektorraum U und *hermiteschem* Skalarprodukt $\langle ., .\rangle$?