
Mathematik für Studierende der Physik – Blatt 4

Sommersemester 2025

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/maphy2_25.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250436.html

Abgabe: Montag, den 12.05.2025, 23:59 Uhr

18 $AB \neq BA$

5 Punkte

Auf dem Raum der reellen, differenzierbaren Funktionen sind zwei Operatoren A und B gegeben durch

$$A(f)(x) = \frac{d}{dx}f(x), \quad B(f)(x) = xf(x).$$

Zeigen Sie:

$$AB - BA = 1.$$

19 Lineare Unabhängigkeit

5 Punkte

A sei ein Endomorphismus auf dem Vektorraum V und $v \in V$, $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$A^{n-1}v \neq 0 \quad \text{und} \quad A^n v = 0.$$

Beweisen Sie, dass dann $v, A(v), A^2(v), \dots, A^{n-1}(v)$ linear unabhängige Vektoren sind.

20 Matrix-Potenzen und -Exponentialfunktion

6 Punkte

Die n -te Potenz einer $m \times m$ Matrix A ist definiert durch

$$A^0 = \mathbf{1}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (m\text{-dimensionale Einheitsmatrix}),$$

$$A^n = AA^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Die Matrix-Exponentialfunktion ist dann definiert durch $e^A \equiv \exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

Nun sei eine reelle $m \times m$ Matrix A gegeben durch $A_{ij} = \delta_{i-1,j}$, also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dazu zwei m -Tupel $a = (1, 2, 3, \dots, m)^T$ und $b = (1, 0, \dots, 0)^T$. Bestimmen Sie $A^n a$ ($n \in \mathbb{N}$) und $e^A b$.

21 Pauli-Matrizen

5+5=10 Punkte

Die quantenmechanische Beschreibung eines Spin-1/2 Teilchens benötigt die Pauli-Matrizen σ_1, σ_2 und σ_3 . Diese sind komplexe 2×2 Matrixen gegeben durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden zeigen Sie elementare Relationen und eine hilfreiche Identität für $\exp(i\varphi\sigma_j)$.

a) Überprüfen Sie durch direktes Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 &= \mathbf{1}, & \sigma_1\sigma_2 &= i\sigma_3, & \sigma_2\sigma_3 &= i\sigma_1, & \sigma_3\sigma_1 &= i\sigma_2 \\ \sigma_1\sigma_2 &= -\sigma_2\sigma_1, & \sigma_2\sigma_3 &= -\sigma_3\sigma_2, & \sigma_3\sigma_1 &= -\sigma_1\sigma_3. \end{aligned}$$

b) Beweisen Sie die verallgemeinerte Euler-Identität

$$e^{i\varphi\sigma_j} = \cos(\varphi) \mathbf{1} + i \sin(\varphi) \sigma_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

22 Der Vektorraum $M(n \times m, \mathbb{K})$

3+6=9 Punkte

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ sei $E_{ij} \in M(n \times m, \mathbb{K})$ die Matrix deren Einträge nur aus Nullen bestehen, mit Ausnahme einer Eins in der i -ten Komponente des j -ten Spaltenvektors, also

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} \quad i$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrizen $(E_{ij})_{i=1..n, j=1..m}$ eine Basis des Vektorraums der $n \times m$ Matrizen bilden.

b) Eine $n \times n$ Matrix A ist *symmetrisch*, wenn $A_{ij} = A_{ji}$, *antisymmetrisch*, wenn $A_{ij} = -A_{ji}$, und *diagonal*, wenn $A_{ij} = d_i \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

$S(n, \mathbb{K})$ sei die Menge aller symmetrischen Matrizen, $A(n, \mathbb{K})$ die Menge aller antisymmetrischen Matrizen und $D(n, \mathbb{K})$ die Menge aller diagonalen Matrizen in $M(n \times n, \mathbb{K})$. Überzeugen Sie sich davon, dass diese Mengen jeweils Untervektorräume von $M(n \times n, \mathbb{K})$ bilden und bestimmen Sie deren Dimensionen. Welche dieser Untervektorräume sind abgeschlossen unter Matrixmultiplikation?