Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematik für Studierende der Physik – Blatt 5

Sommersemester 2025

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/maphy2_25.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250436.html

Abgabe: Montag, den 19.05.2025, 23:59 Uhr

23 Lineare Abbildungen und Matrizen — $4 \times 2 = 8$ **Punkte**

Stellen Sie folgende lineare Abbildungen durch geeignete Matrizen dar:

a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto a \times x,$ mit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

b) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle b, x \rangle,$ mit Standardskalarprodukt $\langle .,. \rangle$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

c) $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto b\langle b, x \rangle,$ mit b wie unter **b)**.

d) $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle b, a \times x \rangle,$ mit a und b wie unter **a)** bzw. **b)**.

24 Abbildungsmatrizen — **1+2+2+3=8 Punkte**

P_3 sei der Vektorraum der reellen, ganzrationalen Funktionen maximal dritten Grades. Die lineare Abbildung A sei die Ableitung $A = \frac{d}{dx} : P_3 \to P_3$.
a) Welchen Rang hat die Abbildung A?
b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_BA_B$ bzgl. der Basis $B = (1, x, x^2, x^3)$.
c) Wie müssen Basen B' und C von P_3 gewählt werden, damit

$$ {}_CA_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

d) Es sei $T = \exp(A) : P_3 \to P_3$. Bestimmen Sie für Basis $B = (1, x, x^2, x^3)$ und Basis $C = (1, (x+1), (x+1)^2, (x+1)^3)$ die Abbildungsmatrix ${}_CT_B$.

25 Endomorphismus — **6 Punkte**

Die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Matrix

$$ A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ -1 & 11 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} $$

gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_BA_B$ bzgl. Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

26 Matrixinversion

1+2+4=8 Punkte

a) A und B seien zwei invertierbare $n \times n$ Matrizen. Zeigen Sie: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad \neq bc$. Zeigen Sie:

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

c) Invertieren Sie folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$