Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln R. Klesse

Mathematik für Studierende der Physik – Blatt 6

Sommersemester 2025

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/maphy2_25.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250436.html

Abgabe: Montag, den 26.05.2025, 23:59 Uhr

27 Zur Diskussion

a) Nennen Sie drei Eigenschaften der Determinante.

b) Wie lautet die Leibniz-Formel für die Determinante?

c) Wie lautet der Laplacesche Entwicklungssatz?

d) Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen mittels elementarer Eigenschaften der Determinante, ohne Verwendung von Leibniz-Formel oder Laplacescher Entwicklung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad AB, \qquad ,C^{-1} \,.$$

28 Determinanten **6 Punkte**

Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}, \; C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

29 Matrix-Spur **2+2+2=6 Punkte**

Sie *Spur* einer $n \times n$ Matrix A ist definiert als die Summe ihrer Diagonalelemente,

$$\mathrm{Sp}(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \,.$$

a) A sei eine $n \times m$ Matrix und B eine $m \times n$ Matrix. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA) \,.$$

b) $M_1, M_2, \ldots, M_k$ seien $n \times n$ Matrizen. Zeigen Sie, dass die Spur des k-fachen Matrixprodukts $M_1 M_2 \ldots M_k$ invariant unter zyklischer Permutation der Faktoren ist:

$$\mathrm{Sp}(M_1 M_2 \ldots M_k) = \mathrm{Sp}(M_2 M_3 \ldots M_k M_1) = \mathrm{Sp}(M_3 M_4 \ldots M_k M_1 M_2) = \cdots = \mathrm{Sp}(M_k M_1 M_2 \ldots M_{k-1}).$$

c) Zwei $n \times n$ Matrizen A und A' sind einander *ähnlich*, wenn ein Isomorphismus $S : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ existiert derart, dass

$$A' = S^{-1} A S \,.$$

Zeigen Sie:

(i) ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur.
(ii) ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante.

30 Blockdiagonalmatrix **6 Punkte**

Eine *blockdiagonale* Matrix M setzt sich wie folgt aus zwei quadratischen Untermatrizen A und B zusammen:

$$M = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} .$$

Die Dimensionen der Matrizen A und B addieren sich zur Dimension n der Matrix M, alle Matrixelemente M_{ij} außerhalb der Untermatrizen A und B verschwinden. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B), \qquad \det(M) = \det(A)\det(B)\,.$$

Lassen sich diese Relationen für eine blockdiagonale Matrix

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit k quadratischen Untermatrizen $A_1,\ A_2, \dots,\ A_k$ verallgemeinern?

31 Ellipsoid **2+4+4=10 Punkte**

Das Gebiet $E \subset \mathbb{R}^3$ sei durch ein Ellipsoid mit Halbachsen a, b, c begrenzt, d.h.

$$(x, y, z) \in E \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \;\leq\; 1\,.$$

a) Skizzieren Sie das Gebiet E für Halbachsen $a = 2cm$ und $b = c = 1cm$.

b) Die Abbildung $g : [0,1] \times [0,\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g(s, \vartheta, \varphi) \;=\; s \begin{pmatrix} a\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ b\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ c\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

parametrisiert das Gebiet E. Zeigen Sie, dass für (s, ϑ, φ) im Definitionsbereich $g(s, \vartheta, \varphi) \in E$, berechnen Sie die Jacobi-Matrix Jg und die Determinante $\det(Jg)$.

c) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Vol}(E) \;\equiv\; \int_E dV \;=\; \frac{4\pi}{3} abc\,.$$