Mathematik für Studierende der Physik – Blatt 7

Sommersemester 2025

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/maphy2_25.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250436.html

Abgabe: Montag, den 02.06.2025, 23:59 Uhr

32 Zur Diskussion

- a) Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren eines Operators oder $n \times n$ Matrix?
- b) Was versteht man unter dem Eigenraum eines Eigenwerts?
- c) Wie lauten die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ?$$

- d) Was ist das charakteristische Polynom eines Operators oder einer $n \times n$ Matrix? Was besagen seine Nullstellen und deren Vielfachheiten?

33 Eigenräume

2 Punkte

λ und μ seien zwei voneinander verschiedene Eigenwerte eines Operators A . Zeigen Sie, dass $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.

34 Eigenschwingungen

6 Punkte

Die Eigenschwingungen des in der Vorlesung vorgestellten Systems aus drei Massenpunkten sind im Wesentlichen durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmt. Ermitteln Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von A .

35 Eigenwerte von A , $\exp(A)$ und A^{-1}

3×2=6 Punkte

v sei Eigenvektor des Operators A zum Eigenwert λ . Zeigen Sie:

- a) v ist Eigenvektor des Operators A^m zum Eigenwert λ^m ($m \in \mathbb{N}$).
- b) v ist Eigenvektor des Operators $\exp(A)$ zum Eigenwert e^λ .
- c) Ist A invertierbar, so ist $\lambda \neq 0$ und v ist Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$.

36 Eigenwerte in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

2+4=6 Punkte

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und -vektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

aufgefasst als

a) *reeller* Endomorphismus $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$

b) *komplexer* Endomorphismus $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$

37 Pauli-Matrizen

4 Punkte

Bestimmen Sie für die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

jeweils Eigenwerte und -vektoren.

38 Eigenraumdimension und Vielfachheit der Nullstelle

4 Punkte

Gegeben sei die 4×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(nicht aufgeführte Matrixelemente verschwinden). Wie lautet das charakteristische Polynom von A , was ist die Vielfachheit der Nullstelle λ , und was ist die Dimension des Eigenraums E_λ ?