Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematik für Studierende der Physik – Blatt 8

Sommersemester 2025

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/maphy2_25.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250436.html

Abgabe: Montag, den 16.06.2025, 23:59 Uhr

39 Zur Diskussion

A sei ein Operator auf einem unitären Vektorraum V. $B = (e_1, \dots, e_n)$ sei eine orthonormale Basis von V.

a) Wie lässt sich das Matrixelement $({}_BA_B)_{ij}$ mittels Skalarprodukt bestimmen?
b) Warum ist $\mathrm{Sp}(A) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, Ae_i \rangle$?
c) Wie ist der adjungierte Operator A^+ definiert?
d) Wie erhalten Sie aus ${}_BA_B$ die Abbildungsmatrix der adjungieren Abbildung A^+?

40 Matrixadjunktion **3 Punkte**

Adjungieren Sie folgende Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen definieren selbstadjungierte Operatoren?

41 Selbstadjungierte Operatoren **6 Punkte**

V sei ein unitärer Vektorraum und $A, B : V \to V$ seien selbstadjungierte Operatoren. Es gelte $AB \neq BA$. Welche der folgenden Operatoren sind ebenfalls selbstadjungiert?

$$A + B, \quad AB, \quad AB + BA, \quad A + iB, \quad AB - BA, \quad i(AB - BA),$$
$$A^n \text{ für } n \in \mathbb{N}, \qquad ABA.$$

42 Operatorexponentialfunktion **6 Punkte**

A sei ein selbstadjungierter Operator mit einer orthonormalem Eigenbasis B. Die Abbildungsmatrix von A bzgl. B sei

$$ {}_BA_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} $$

Zeigen Sie: $\exp(A) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} A^l$ ist ebenfalls ein selbstadjungierter Operator, die Eigenbasis B von A ist zugleich Eigenbasis von $\exp(A)$ und es ist

$$_B\exp(A)_B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & & \\ & e^{\lambda_2} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

zudem gilt:

$$\det(\exp(A)) = e^{\mathsf{Sp}(A)} .$$

43 Orthonormale Eigenbasen **8 Punkte**

Bestimmen Sie orthonormale Eigenbasen für die Operatoren $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wie lauten die Abbildungsmatrizen der Operatoren A und B bzgl. der jeweiligen Eigenbasen?

44 Ableitung **4+4=8 Punkte**

Die differenzierbaren Funktionen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ mit *periodischer Randbedingung*:

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

bilden eine Vektorraum. Mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) g(x) dx$$

wird dieser zu einem *unitären* Vektorraum. Im Folgenden betrachten wir den Operator

$$p := -i \frac{\partial}{\partial x}$$

auf diesen Raum. Zeigen Sie:

a) p ist selbstadjungiert

b) die Funktionen $\{e^{in}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sind orthogonale Eigenfunktionen von p zu Eigenwerten $n \in \mathbb{Z}$.