Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse

Mathematik für Studierende der Physik – Blatt 9

Sommersemester 2025

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/maphy2_25.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_6250436.html

Abgabe: Montag, den 23.06.2025, 23:59 Uhr

45 Zur Diskussion

a) Was sind orthogonale und unitäre Operatoren bzw. Matrizen?
b) Nennen Sie spezielle Eigenschaften orthogonaler und unitärer Operatoren.

46 Orthogonale Gruppe — 3+3+2=8 Punkte

Eine Menge M mit einer Verknüpfung ("Multiplikation") $a, b \mapsto a \cdot b$ bildet bekanntlich eine Gruppe wenn folgende Bedingungen erfüllt sind (im Folgenden schreiben wir kurz ab stat $a \cdot b$ und a, b, c bezeichnen allgemeine Elemente aus M):

1. M ist abgeschlossen unter der Verknüpfung: $ab \in M$
2. die Verknüpfung ist assoziativ: $a(bc) = (ab)c$
3. es existiert ein Einselement $e \in M$ mit der Eigenschaft $ae = ea = a$
4. es existiert ein inverses Element a^{-1} zu a mit $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

Die Gruppe ist *abelsch* wenn zudem $ab = ba$.

a) Die Menge aller $n \times n$ orthogonalen Matrizen mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung bildet die *orthogonale Gruppe* $O(n)$. Weisen Sie die Gruppeneigenschaften der Gruppe $O(n)$ nach.

b) Weisen Sie ebenso die Gruppeneigenschaften der *speziellen* orthogonalen Gruppe $SO(n)$ nach. Diese Gruppe besteht aus der Menge aller $n \times n$ orthogonalen Matrizen deren Determinante $+1$ beträgt. Die Matrixmultiplikation ist wieder die Verknüpfung.

c) Für welche n ist $O(n)$ bzw. $SO(n)$ abelsch?

47 Reelle Eigenwerte — 3 Punkte

Zeigen Sie: die Eigenwerte eines hermiteschen Operators sind reell.

48 Simultane Diagnonalisierbarkeit **6 Punkte**

Die folgenden Matrizen definieren symmetrische Operatoren $A, B, C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der Paare (A, B), (A, C) und (B, C) sind simultan diagonalisierbar? Bestimmen Sie ggf. eine gemeinsame Eigenbasis.

49 Spektraldarstellung **2+3=5 Punkte**

$A : V \to V$ sei ein hermitescher Operator mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ und zugehörgien Eigenräumen $E_1, \ldots, E_l \subset V$. Die Operatoren $P_1, \ldots, P_l : V \to V$ seien die Orthogonalprojektionen auf die Eigenräume. D.h. für $u \in E_i$ ist $P_i u = u$ und $P_j u = 0$ falls $j \neq i$.

a) Zeigen Sie:

$$A = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i P_i \,.$$

Diese Darstellung von A als Linearkombination der P_i ist die *Spektraldarstellung* des Operators A.

b) $f(x)$ sei eine analytische Funktion mit einer Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die für $x \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ konvergent sei. Der Operator $f(A)$ ist definiert durch diese Reihe: $f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$. Zeigen Sie:

$$f(A) = \sum_{i=1}^{l} f(\lambda_i) P_i \,.$$

50 Rotation **10 Punkte**

Die orthogonale Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Rotation im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Drehachse $\hat{n}$ und den Drehwinkel φ dieser Rotation.