Lösungshinweise 1. Blatt

1a) offenbar $b_1 = c_1$, $b_2 = c_2 - c_1$, $b_3 = c_3 - c_2$

und $b_4 = c_4 - c_3$ (*)

$\rightarrow$ Basisvektoren $b_1, \ldots, b_4$ können als

Linearkombinationen der $c_1, \ldots, c_4$ dargestellt werden

$\rightarrow$ $c_1, \ldots, c_4$ ist Erzeugendensystem.

Zudem $c_1, \ldots, c_4$ linear unabhängig; andernfalls Widerspruch zum Satz über die Konstanz der Anzahl von Basisvektoren

$\rightarrow$ $c_1, \ldots, c_4$ bilden Basis.

b)
$$u = \sum_{i=1}^{4} u_i c_i = u_1 b_1 + u_2 (b_1 + b_2) + u_3 (b_1 + b_2 + b_3) + u_4 (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$$
$$= (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) b_1 + (u_2 + u_3 + u_4) b_2 + (u_3 + u_4) b_3 + u_4 b_4$$
$$\rightarrow \quad {}_B u = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_2 + u_3 + u_4 \\ u_3 + u_4 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

2a)
$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = 0\, b_1(x) + 4\, b_2(x) - 4\, b_3(x) + 1\, b_4(x)$$
$$\rightarrow \quad {}_B f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$g(x) = x^2 - 1 = -b_1(x) + b_3(x) \quad \rightarrow \quad {}_B g = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \quad {}_B 3f = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad {}_B(f+g) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2b) Wie in 1a) $c_l = \sum_{i=1}^{l} b_i$ und daher auch hier $c_1, \ldots, c_4$ Basis.

Komponenten:

1a) (*)

$$u = \sum_i u_i b_i = u_1 c_1 + u_2 (c_2 - c_1) + u_3 (c_3 - c_2) + u_4 (c_4 - c_3)$$
$$= (u_1 - u_2) c_1 + (u_2 - u_3) c_2 + (u_3 - u_4) c_3 + u_4 c_4$$

$$\rightsquigarrow \quad {}_C u = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_2 - u_3 \\ u_3 - u_4 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

$${}_B f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow {}_C f = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow {}_C (3f) = \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$${}_B g = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow {}_C g = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad {}_C (f+g) = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Check:

$$f(x) \overset{?}{=} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}_C (x) = -4 + 8(1+x) - 5(1+x+x^2) + (1+x+x^2+x^3)$$
$$= x^3 - 4x^2 + 4x \quad ✓$$

$$g(x) \overset{?}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C (x) = -1 - (1+x) + (1+x+x^2) = x^2 - 1 \quad ✓$$

2c) Nur Abgeschlossenheit der Mengen unter Addition und Skalarmultiplikation muss geprüft werden, restlichen Eigenschaften folgen falls Ergebnis positiv.

- M_1 ist VR: $f, g \in M_1 \rightsquigarrow (f+g)(1) = \underbrace{f(1)}_{\overset{!}{=}0} + \underbrace{g(1)}_{\overset{!}{=}0} = 0$

  $(\lambda f)(1) = \lambda \underbrace{f(1)}_{\overset{!}{=}0} = 0$

  d.h. $f+g, \lambda f \in M_1$

  Basisfktn: $x-1,\ x^2-1,\ x^3-1 \rightsquigarrow \dim M_1 = 3$

- M_2 ist kein VR: $(x \mapsto 1) \in M_2$ aber $2(x \mapsto 1) \notin M_2$

- M_3 ist VR: $f, g \in M_3 \rightsquigarrow (f+g)(0) = f(0) + g(0) =$

  $= f(1) + g(1) = (f+g)(1)$; $(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda f(1) = (\lambda f)(1)$

d.h. $f+g,\ \lambda f \in M_3$

Basisfkten: $1,\ x-x^2,\ x-x^3 \rightsquigarrow \dim M_3 = 3$

- M_4 ist VR, Abgeschlossenheit: .... ✓

  Basisfkten: $1,\ x^2 \rightsquigarrow \dim M_4 = 2$

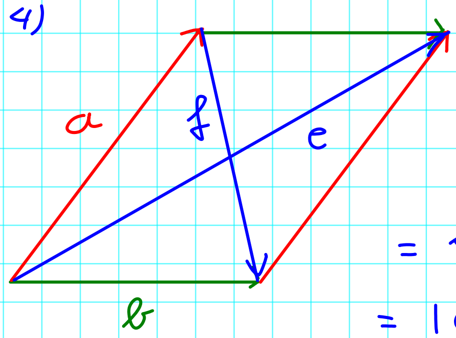
- M_5 ist VR, ..., Basisfkten: $x,\ x^3 \rightsquigarrow \dim M_5 = 2$
- $M_6 = \{0 : x \mapsto 0\}$ ist VR der Dimension 0 !
- M_7 ist VR mit Basisfkt. $1-x^2$, $\rightsquigarrow \dim M_7 = 1$

3) $a = -u - v, \quad b = u - v$

$\rightarrow \langle a, b\rangle = -\langle u+v, u-v\rangle = -|u|^2 + |v|^2 = 0$

also $a \perp b$

4)



4a) $\underline{\underline{E^2 + F^2}} = |e|^2 + |f|^2$

$= |a+b|^2 + |b-a|^2$

$= \langle a+b, a+b\rangle + \langle b-a, b-a\rangle$

$= |a|^2 + |b|^2 + 2\cancel{\langle a,b\rangle} + |b|^2 + |a|^2 - 2\cancel{\langle a,b\rangle}$

$= 2(|a|^2 + |b|^2) = \underline{\underline{2(A^2+B^2)}}$

4b) $\langle f, e\rangle = \langle a+b, b-a\rangle = |b|^2 - |a|^2 =$

$= B^2 - A^2 = 0$ da hier $A = B$

d.h. $\langle f, e\rangle = 0$ und somit $f \perp e$.