

Lösungshinweise Blatt 10

$$52) \quad (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda_1 \in \mathbb{R}}}{v_1}, v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle - \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle$$

$$= \langle A v_1, v_2 \rangle - \langle v_1, A v_2 \rangle \underset{A=A^\dagger}{=} \langle v_1, A v_2 \rangle - \langle v_1, A v_2 \rangle = 0$$

da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt $\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \rightarrow v_1 \perp v_2$

$$53) \quad A = B + iG \quad \text{mit} \quad B = \frac{1}{2} (A + A^\dagger) \quad \text{und} \quad G = \frac{i}{2} (A^\dagger - A);$$
$$B = B^\dagger \checkmark, \quad G^\dagger = \frac{-i}{2} (A - A^\dagger) = G \checkmark$$

54) Da A und B kommutieren (d.h. $AB = BA$) gibt es gemeinsame Eigenbasis E bzgl. denen

$$\underset{E}{(e^A)}_{\underset{E}{E}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & e^{\lambda_2} & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad \underset{E}{(e^B)}_{\underset{E}{E}} = \begin{pmatrix} e^{\mu_1} & & \\ & e^{\mu_2} & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\mu_n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{E}{(e^A e^B)}_{\underset{E}{E}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 + \mu_1} & & \\ & e^{\lambda_2 + \mu_2} & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n + \mu_n} \end{pmatrix} = \underset{E}{(e^{A+B})}_{\underset{E}{E}}$$

$$\text{d.h. } e^A e^B = e^{A+B}$$

$$b) \quad (e^{iH})^\dagger e^{iH} = e^{(iH)^\dagger} e^{iH} = e^{-iH} e^{iH} \underset{\text{a)}}{=} e^0 = \mathbb{1}$$

$$c) \quad (e^A)^T e^A = e^{A^T} e^A = e^{-A} e^A \underset{\text{a)}}{=} e^0 = \mathbb{1}$$

d) Nach Aufgabe 21 b) (Blatt 4) ist

$$\underbrace{e^{-i\varphi \sigma_2}}_{\text{"} e^{\varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \text{"}} = \cos \varphi \, \mathbb{1}_2 - i \sin \varphi \, \sigma_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

55) Die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_\ell$ bilden orthogonale Basis

$\rightarrow u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_\ell v_\ell$ mit $a_1 \neq 0$ da
nach Voraussetzung $\langle v_1, u \rangle \neq 0$;

$$\rightarrow A^n u = A^n \sum_{i=1}^{\ell} a_i v_i = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \lambda_i^n v_i$$

$$= \lambda_1^n \left(a_1 v_1 + \sum_{i=2}^{\ell} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n v_i \right) \rightarrow \lambda_1^n a_1 v_1$$

$\rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

da $|\lambda_i / \lambda_1| \leq 1$

d.h. $f_n = \frac{A^n u}{|A^n u|}$ konvergiert gegen $\frac{a_1 v_1}{|a_1| |\tilde{v}_1|} =: \tilde{v}_1$

$\uparrow$

normierter EV zum EW λ_1