Lösungshinweise Blatt 3

13a) U_1 UVR, $\dim U_1 = 0$

U_2 kein UVR, da $0 \cdot (111) = 000 \notin U_2$

$U_3 = \mathrm{Span}\{111\}$, UVR, $\dim U_3 = 1$

U_4 kein UVR, da $001 + 010 = 011 \notin U_4$

$U_5 = \mathrm{Span}\{001, 100\}$, UVR, $\dim U_5 = 2$

13b) $V_1 = \{000, 010, 111, 101\}$, $\dim V_1 = 2$

$V_2 = \{000, 100, 011, 111\}$, $\dim V_2 = 2$

$V_3 = V_1 + V_2$: $010 + 011 = 001 \in V_3$

$010 \in V_3$

$100 \in V_3$

$\rightarrow V_3 = \mathrm{Span}\{001, 010, 100\} = \mathbb{F}_2^3$, $\dim V_3 = 3$

$V_4 = \{000, 111\}$, $\dim V_4 = 1$

$$\dim(V_1 + V_2) = 3 = \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim V_1}} + \underset{2}{\underset{\shortparallel}{\dim V_1}} - \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\dim(V_1 \cap V_2)}} \quad \checkmark$$

13c) $A(b_1 b_2 b_3 + c_1 c_2 c_3) = (b_3 + c_3)(b_1 + c_1)(b_1 + c_1)$

$= b_3 b_1 b_1 + c_3 c_1 c_1 = A(b_1 b_2 b_3) + A(c_1 c_2 c_3)$

$A(\lambda(b_1 b_2 b_3)) = (\lambda b_3)(\lambda b_1)(\lambda b_1) =$

$= \lambda(b_3 b_1 b_1) = \lambda A(b_3 b_1 b_1) \quad \checkmark$

$B(b_1 b_2 b_3 + c_1 c_2 c_3) = (b_1 + c_1 + b_2 + c_2 + b_3 + c_3)\,00$

$= (b_1 + b_2 + b_3)\,00 + (c_1 + c_2 + c_3)\,00 = B(b_1 b_2 b_3) + B(c_1 c_2 c_3)$

$B(\lambda(b_1 b_2 b_3)) = (\lambda b_1 + \lambda b_2 + \lambda b_3)\,00$

$= \lambda((b_1 + b_2 + b_3)\,00) = \lambda B(b_1 b_2 b_3) \quad \checkmark$

$\ker A = \mathrm{Span}\{010\} = \{000, 010\}$, $\dim \ker A = 1$

$\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Span}\{100, 011\} = \{000, 100, 011, 111\}$, $\dim \mathrm{Im}\, A = 2$

$\dim \mathbb{F}_2^3 = 3 = \dim \ker A + \dim \mathrm{Im}\, A \quad \checkmark$

$\ker B = \text{Span}\{011, 110\} = \{000, 011, 110, 101\}$, $\dim \ker B = 2$

$\text{Im}\, B = \text{Span}\{100\} = \{000, 100\}$, $\dim \text{Im}\, B = 1$

$\rightarrow \quad \dim \mathbb{F}_2^3 = 3 = \dim \ker B + \dim \text{Im}\, B$ ✓

14) A injektiv $\Rightarrow \dim \ker A = 0$

A surjetiv $\Rightarrow \dim \text{Im}\, A = \dim W$

Dim.-formel: $\dim V = \dim \ker A + \dim \text{Im}\, A = \dim W$

Seien $w_1, w_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$; da A bijektiv, ex. ein $v_1, v_2 \in V$ mit $A(v_1) = w_1$, $A(v_2) = w_2$, nämlich $v_1 = A^{-1}(w_1)$, $v_2 = A^{-1}(w_2)$;

$$\rightarrow A^{-1}(w_1 + w_2) = A^{-1}(A(v_1) + A(v_2)) \overset{A \text{ linear!}}{=} A^{-1}(A(v_1 + v_2))$$

$$= v_1 + v_2 = A^{-1}(w_1) + A^{-1}(w_2),$$

$$A^{-1}(\lambda w_1) = A^{-1}(\lambda A(v_1)) \underset{A \text{ linear}}{=} A^{-1}(A(\lambda v_1)) = \lambda v_1 = \lambda A^{-1}(w_1)$$

also A^{-1} linear.

15) $\ker A = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim \ker A = 2$

$\text{Im}\, A = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim \text{Im}\, A = 1$

⌈ Test: $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \ker A + \dim \text{Im}\, A$ ✓ ⌋

A weder injektiv noch surjektiv, da $\dim \ker A > 0$ und $\dim \text{Im}\, A < \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

$\ker B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim \ker B = 0$

$\text{Im}\, B = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} \right\}$, $\dim \text{Im}\, B = 2$

⌈ Test: $\dim \mathbb{C}^2 = 2 = \dim \operatorname{Ker} B + \dim \operatorname{Im} B$ ✓

B injektiv, da $\dim \ker B = 0$, aber nicht surjektiv, da $\dim \operatorname{Im} B = 2 < 3 = \dim \mathbb{C}^3$.

16) V eukl. VR: (i) $\Rightarrow$ (ii) ✓

(ii) $\Rightarrow$ (i): Für $u, v \in V$ bel. gewählt ist

a) $|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v\rangle$

b) $|A(u+v)|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ lin.}}}{=} |A(u) + A(v)|^2 = |A(u)|^2 + |A(v)|^2 + 2\langle A(u), A(v)\rangle$

nach Vor. ist "a) = b)" und $|u|^2 = |A(u)|^2$, $|v|^2 = |A(v)|^2$

also auch $\langle u, v\rangle = \langle A(u), A(v)\rangle$ ■

Äquivalenz gilt auch für unitären VR:

(ii) $\Rightarrow$ (i): Für $u, v \in U$ bel. gewählt ist

a) $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + \underbrace{\langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle}_{\shortparallel}$

$= |u|^2 + |v|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle u, v\rangle$

a') $|u + iv|^2 = |u|^2 + |v|^2 + \underbrace{\langle u, iv\rangle + \underbrace{\langle iv, u\rangle}_{\substack{\shortparallel \\ -i\langle u, v\rangle^*}}}_{\substack{\shortparallel \\ i\, 2 \operatorname{Im}\langle u, v\rangle}}$

$= |u|^2 + |v|^2 + i\, 2 \operatorname{Im}\langle u, v\rangle$

b) $|A(u+v)|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ lin.}}}{=} |A(u)|^2 + |A(v)|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle A(u), A(v)\rangle$

b') $|A(u+iv)|^2 = |A(u)|^2 + |A(v)|^2 + i\, 2 \operatorname{Im}\langle A(u), A(v)\rangle$

nach Vor. "a) = b)", "a') = b')" und $|A(u)| = |u|$,

$|A(v)| = |v| \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re}\langle A(u), A(v)\rangle = \operatorname{Re}\langle u, v\rangle \\ \operatorname{Im}\langle A(u), A(v)\rangle = \operatorname{Im}\langle u, v\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \langle A(u), A(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ ■