Lösungshinweise Blatt 4

18) $(AB - BA)(f)(x) = \frac{d}{dx}\left(x f(x)\right) - x \frac{d}{dx} f(x)$

$= f(x) + x f'(x) - x f'(x) = f(x)$

$= 1(f)(x)$

für bel. Fkt.en $f \to AB - BA = 1$

19)

$0 \overset{!}{=} \mu_0 v + \mu_1 A(v) + \dots + \mu_{n-2} A^{n-2}(v) + \mu_{n-1} A^{n-1}(v) \to \mu_{n-1} = 0$

$\downarrow A$

$0 = \mu_0 A(v) + \mu_1 A^2(v) + \dots + \mu_{n-2} A^{n-1}(v) \to \mu_{n-2} = 0$

$\downarrow A$

$\vdots$

$0 = \mu_0 A^{n-2}(v) + \mu_1 A^{n-1}(v) \to \mu_1 = 0$

$\downarrow A$

$0 = \mu_0 A^{n-1}(v) \to \mu_0 = 0$ $\blacksquare$

alternativ per Induktion über n:

$n=1$: $v = \mathbb{1} v = A^{n-1} v \neq 0$ ✓

$n \to n+1$:

gelte $A^n v \neq 0$, $A^{n+1} = 0$

z.z. $v, A(v), A^2(v), \dots, A^n(v)$ lin. unabhängig

sei $0 = \mu_0 v + \mu_1 A(v) + \mu_2 A(v) + \dots + \mu_n A^n(v)$; $(*)$

Anwendung von A auf diese Gleichung ergibt

mit $w = A(v)$:

$0 = \mu_0 w + \mu_1 A(w) + \mu_2 A(w) + \dots + \mu_{n-1} A^{n-1}(w)$

da $A^n(w) = A^{n+1}(v) = 0$ und $A^{n-1}(w) = A^n(v) \neq 0$

sind dann nach I.V. $w, A(w), \dots, A^{n-1}(w)$ lin. unabhängig $\to \mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = 0$; mit Gl. $(*)$

folgt dann auch $\mu_n = 0$, d.h. $v, A(v), \dots, A^n(v)$

lin. unabhängig $\blacksquare$

20)

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix} \xrightarrow{A} Aa = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} A^2 a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{A} A^{m-1} a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} A^l = 0 \quad \text{für } l \geq m$$

$$A^0 b = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} A^1 b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} A^2 b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \quad A^{m-1} b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $A^l b = 0$ für $l \geq m$

$$\rightarrow e^A b = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n!} A^n b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 1/24 \\ \vdots \\ 1/(m-1)! \end{pmatrix}$$

21 a) ✓

21 b)
$$e^{i\varphi\sigma_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\varphi\sigma_j)^n$$

$$= \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \varphi^{2l}}\ \underbrace{\sigma_j^{2l}}_{=1} + i \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} \varphi^{2l+1}}\ \underbrace{\sigma_j^{2l+1}}_{=\sigma_j}$$

$$= \cos(\varphi)\, 1 + i \sin(\varphi)\, \sigma_j \, .$$

22 a) $n \times m$ Matrix A mit Einträgen A_{ij} ist gleich der Linearkomb. $\sum_{ij} A_{ij} E_{ij}$,

$0 = \sum_{ij} \lambda_{ij} E_{ij}$ impliziert $\lambda_{ij} = 0$

$\rightarrow (E_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ vollständig und lin. unabh.

und damit Basis, $\rightarrow \dim M(n \times m) = n \cdot m$.

22 b) Die Mengen $S(n, \mathbb{K})$, $A(n, \mathbb{K})$ und $D(n, \mathbb{K})$ sind offenbar abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation, $\rightarrow$ $S(n)$, $A(n)$, $D(n)$ UVRe

Dimensionen:

$S(n)$: $S_{ij} := E_{ij} + E_{ji}$ für Paare (i, j) mit $i \leq j \leq n$ bildet Basis von $S(n)$

$\rightarrow$ Anzahl solcher Paare: $\frac{n(n+1)}{2} \overset{!}{=} \dim S(n)$

$A(n)$: $A_{ij} := E_{ij} - E_{ji}$ für Paare (i, j) mit $i \lneq j \leq n$ bildet Basis von $A(n)$

$\rightarrow$ Anzahl solche Paare: $\frac{(n-1)n}{2} = \dim A(n)$

Test: Wegen $S(n) + A(n) = M(n \times n)$ und $S(n) \cap A(n) = \{0\}$ ist

$$\dim M(n \times n) = \dim S(n) + \dim A(n)$$
$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \quad \checkmark$$

$D(n)$: $D_i := E_{ii}$ für $i = 1, \ldots, n$ Basis von $D(n)$

$\rightarrow \dim D(n) = n$

$D(n)$ ist unter Matrixmultiplikation abgeschlossen, $S(n)$ und $A(n)$ nicht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin S(n)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin A(n)$$