Lösungshinweise Blatt 6

28) $\det(A) = ad - bc, \quad \det(B) = \dfrac{1}{\det(A)},$

$$\det(C) = \underset{\substack{1\text{x Spaltenvert.}\\ 1\text{x Zeilenvert.}}}{(-1)^2} \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

1x Spaltenvert.
1x Zeilenvert.

$$= \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = 1$$

Lapl.-Entw. nach
3. + 4. Spalte
(oder Aufg. 30)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6.$$

$(-4)\cdot$ $\qquad$ $(-3)\cdot$

29a) $$\mathrm{Sp}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} A_{i\ell} B_{\ell i}$$
$$= \sum_{\ell=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} B_{\ell i} A_{i\ell}}_{(BA)_{\ell\ell}} = \mathrm{Sp}(BA).$$

b) $$\mathrm{Sp}(M_1 M_2 \cdots M_k) \overset{\text{Matrixprod. ist assoziativ}}{=} \mathrm{Sp}(\underbrace{M_1}_{A}\,\underbrace{(M_2 \cdots M_k)}_{B})$$

Matrixprod.
ist assoziativ

$$\overset{a)}{=} \mathrm{Sp}(\underbrace{(M_2 \cdots M_k)}_{B}\,\underbrace{M_1}_{A}) = \mathrm{Sp}(M_2 M_3 \cdots M_k M_1)$$

$=$ u.s.w.

29 c) A, A' seien ähnliche Matrizen, d.h.

$A' = S^{-1} A S$ für geeignet. Isomorph. S.

Dann $Sp(A') = Sp(S^{-1} A S) \overset{b)}{=} Sp(A \underbrace{S S^{-1}}_{= \mathbb{1}}) = Sp(A)$, (i)

und $\det(A') = \det(S^{-1} A S) = \det(S^{-1}) \det(A) \det(S)$

$= \det(A)$. (ii)

$\det(S^{-1}) = \dfrac{1}{\det(S)}$

30) A sei $m \times m$ Matrix, B $k \times k$ Matrix, $m + k = n$

$\rightarrow Sp(M) = \sum_{i=1}^{m+k} M_{ii} = \sum_{i=1}^{m} A_{ii} + \sum_{i=1}^{k} B_{ii} = Sp(A) + Sp(B)$.

$$M = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} A & \\ & \mathbb{1}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & \\ & B \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \det(M) = \underbrace{\det \begin{pmatrix} A & \\ & \mathbb{1}_k \end{pmatrix}}_{(1) = \det(A)} \underbrace{\det \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & \\ & B \end{pmatrix}}_{(2) = \det(B)} = \det(A) \cdot \det(B) .$$

(1) Lapl. Ent. in den letzten k Spalten

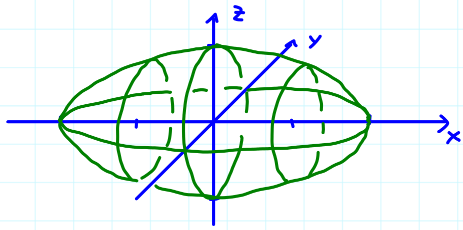
(2) " " " " ersten m " "

Verallgemeinerung:

- $Sp(M_k) = \sum_{i=1}^{k} Sp(A_i)$

- $\det(M_k) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \cdots \det(A_3)$

31 a)



b)

$$\frac{g_x^2}{a^2} + \frac{g_y^2}{b^2} + \frac{g_z^2}{c^2} = s^2\Big(\underbrace{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi}_{=\sin^2\vartheta} + \cos^2\vartheta\Big)$$

$$= s^2(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) = s^2 \leq 1$$

$$Jg = \left(\frac{\partial g}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial \vartheta}, \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a\sin\vartheta\cos\varphi & s\,a\cos\vartheta\cos\varphi & -s\,a\sin\vartheta\sin\varphi \\ b\sin\vartheta\sin\varphi & s\,b\cos\vartheta\sin\varphi & s\,b\sin\vartheta\cos\varphi \\ c\cos\vartheta & -s\,c\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow \underline{\det(Jg)} = s^2 abc \det\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} s^2abc\big(\cos^2\vartheta\sin\vartheta\cos^2\varphi + \sin^3\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta\sin\vartheta\sin^2\varphi + \sin^3\vartheta\cos^2\varphi\big)$$

$$= s^2abc(\cos^2\vartheta\sin\vartheta + \sin^3\vartheta) = \underline{s^2abc\sin\vartheta}$$

c)

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E dV = \int_0^1 ds \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \underbrace{s^2abc\sin\vartheta}_{\det(Jg)}$$

$$= abc \underbrace{\int_0^1 ds\, s^2}_{1/3} \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \frac{4\pi}{3}abc.$$