Lösungshinweise Blatt 7

33) Sei $v \in E_\lambda \cap E_\mu$; d.h. $Av = \lambda v$ und $Av = \mu v$

$$\rightsquigarrow \quad 0 = Av - Av = \lambda v - \mu v = \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} v \quad \rightsquigarrow \quad v = 0.$$

d.h. $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$

34) $$p(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (1-x)^2(2-x) - 2(1-x)$$

$$= (1-x)\big((1-x)(2-x) - 2\big) = (1-x)(-3x + x^2) = x(1-x)(x-3)$$

$\rightsquigarrow$ Nullstellen $\hat{=}$ Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$:
$$0 = (A - 0\mathbb{1})v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 \quad \rightsquigarrow \quad \text{etwa } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 1$:
$$0 = (A - \mathbb{1})v = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad x_2 = 0, \quad x_1 = -x_2 \quad \rightsquigarrow \quad \text{etwa } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_3 = 3$:
$$0 = (A - 3\mathbb{1})v = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad x_1 = x_3 = -\tfrac{1}{2} x_2 \quad \rightsquigarrow \quad \text{etwa } v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

35a) $$A^m v = A^{m-1} \underbrace{Av}_{\lambda v} = A^{m-2} \lambda^2 v = A^{m-3} \lambda^3 v = \cdots = \lambda^m v \quad \blacksquare$$

b) $$\exp(A) v = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m v \underset{a)}{=} \underbrace{\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \lambda^m \right)}_{= e^\lambda} v \quad \blacksquare$$

c) A invertierbar $\Rightarrow$ $\ker A = \{0\}$ $\Rightarrow$ $Av = \lambda v \neq 0$ $\Rightarrow$ $\lambda \neq 0$.

$$Av = \lambda v \;\Rightarrow\; v = \lambda A^{-1} v \;\Rightarrow\; \frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v \quad \blacksquare$$

35 a) $P(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & -1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = \underbrace{(1-x)^2}_{\geq 0} + 1 \underset{\neq}{>} 0 \quad , \; x \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ $P(x)$ besitzt in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle, $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

besitzt keinen Eigenwert/-vektor.

35 b) $P(z) = \det\begin{pmatrix} 1-z & -1 \\ 1 & 1-z \end{pmatrix} = (1-z)^2 + 1 \overset{!}{=} 0 \quad , \; z \in \mathbb{C}$

$\rightarrow$ $z_{1/2} = 1 \pm i$, einfache Nullstellen von $P(z)$

$\rightarrow$ $A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ besitzt kompl. Eigenwerte $\lambda_{1/2} = 1 \pm i$

Eigenvektor zu λ_1: $\quad 0 = (A - (1+i)\mathbb{1}_2)\, v = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} v$

$\rightarrow$ etwa $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$;

Eigenvektor zu λ_2: $\quad 0 = (A - (1-i)\mathbb{1}_2)\, v = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} v$

$\rightarrow$ etwa $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

37)

σ_1 : EWe $+1, -1$ zu EVen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

σ_2 : EWe $+1, -1$ zu EVen $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

σ_3 : EWe $+1, -1$ zu EVen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

38) $P(x) = \det\begin{pmatrix} \lambda-x & 1 & & \\ & \lambda-x & 1 & \\ & & \lambda-x & 1 \\ & & & \lambda-x \end{pmatrix} = (\lambda-x)^4$,

$\rightarrow$ Nullstelle λ der Vielfachheit $m_\lambda = 4$;

$E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda\mathbb{1}) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}(e_1)$

d.h. $\dim E_\lambda = 1 \underset{\neq}{\leq} m_\lambda = 4$.