Lösungshinweise Blatt 8

40) $(1 \;\; i)^+ = \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}^+ = (1 \;\; -i)$, $\quad \begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}^+ = -\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\right]^+ = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}-1&-2\\2&-1\end{pmatrix}$$

$\uparrow$

nur diese Matrix def. selbstadjungierten Operator

41) $AB \neq BA \rightsquigarrow A \neq 0,\; A \neq \mathbb{1},\; B \neq 0,\; B \neq \mathbb{1}$

$(A+B)^+ = A^+ + B^+ = A + B \quad \oplus$

$(AB+BA)^+ = B^+A^+ + A^+B^+ = BA + AB = AB + BA \quad \oplus$

$(A+iB)^+ = A^+ - iB^+ = A - iB \neq A + iB \quad \ominus$

$(AB-BA)^+ = B^+A^+ - A^+B^+ = BA - AB \neq AB - BA \quad \ominus$

$(i(AB-BA))^+ = -i(AB-BA)^+ = -i(BA-AB) = i(AB-BA) \quad \oplus$

$(A^n)^+ = (A \cdots A)^+ = A^+ \cdots A^+ = A \cdots A = A^n \quad \oplus$

$(ABA)^+ = A^+B^+A^+ = ABA \quad \oplus$

42) Mit A selbstadj auch A^ℓ und $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell = e^A$ selbstadjungiert;

v_i EV von A zum EW $\lambda_i \rightarrow v_i$ EV von A^ℓ zum EW λ_i^ℓ

$\rightarrow v_i$ EV von $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell = e^A$ zum EW $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \lambda_i^\ell = e^{\lambda_i}$

$\rightsquigarrow$ Eigenbasis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von A auch Eigenbasis von e^A

und $${}_B e^A{}_B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix};$$

$$\det(e^A) = \det({}_B e^A{}_B) = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}_{= \,\mathrm{Sp}({}_B A_B) \,\equiv\, \mathrm{Sp}(A)}}$$

43) $\underline{\underline{A}}$: $\quad p_A(x) = \det\begin{pmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 3x \end{pmatrix} = (3-x)^2 + 1 = (4-x)(2-x)$

$\rightarrow$ 2 und 4 sind EWe von A;

$$\ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker(A - 4\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\rightarrow$ $E = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ist orthonormale Eigenba. zu A

und $\quad {}_E A_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{B}}$: Vertauschung von 2. und 4. Spalte sowie 2. und 4. Zeile überführt B in $\tilde{B} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ B besitzt EWe 2 und 4, $\dim E_2 = \dim E_4 = 2$

Eigenbasis z.B. $\quad E = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{E_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{E_4} \Bigg)$

$$\rightarrow \quad {}_E B_E = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}.$$

44 a) für beliebige $f, g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\left.\begin{array}{l} f(\pi) = f(-\pi) \\ g(\pi) = g(-\pi) \end{array}\right\} (*)$

ist $\langle f, \underline{\underline{p}} g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) \left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) g(x)\, dx$

$$\underset{\text{partielle Integrat.}}{=} \underbrace{-i f^*(x) g(x) \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{= 0 \ (*)} + \underbrace{i \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} f^*(x)\right) g(x)\, dx}_{= \int_{-\pi}^{\pi} \big(\underbrace{-i \frac{\partial}{\partial x} f(x)}_{(pf)(x)}\big)^* g(x)\, dx} = \langle \underline{\underline{p}} f, g \rangle$$

also $\langle f, pg \rangle \equiv \langle p^+ f, g \rangle = \langle pf, g \rangle \xrightarrow[f, g \text{ beliebig}]{} p^+ = p$

44 b)

$$p\, e^{inx} = -i \frac{\partial}{\partial x} e^{inx} = n\, e^{inx}$$

$\rightarrow$ n EW von p zum EV (= Eigenfunktion) e^{inx}

Orthogonalität: für $n \neq m$ ist

$$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\underbrace{(m-n)}_{\substack{\shortparallel \\ \ell \neq 0}} x}\, dx = \left. \frac{e^{i\ell x}}{i\ell} \right|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{i}{\ell}\left(e^{-i\pi\ell} - e^{i\pi\ell} \right) = \frac{i\, e^{-i\pi\ell}}{\ell} \Big(1 - \underbrace{e^{2\pi i \ell}}_{\substack{\shortparallel \\ 1,\ \text{da } \ell \in \mathbb{Z}}} \Big) = 0 \quad ✓$$