

Lösungshinweise Blatt 9

46a) • Abgeschlossenheit: A, B orthogonal

$$\rightarrow (AB)^T (AB) = B^T \underbrace{A^T A}_{\substack{= 1 \\ \text{da } A \text{ orthogonal}}} B = B^T B = 1 \quad \substack{\text{da } B \text{ orthogonal}}$$

d.h. AB orthogonal

- Assoziativität der Multiplikation allgemeiner Matrizen impliziert Assoziativität orthogonaler Matrizen
- $e = 1_n$ offenbar orthogonal $\rightarrow$ Existenz von $e = 1_n \in O(n)$
- orthogonale Matrix A invertierbar und $A^{-1} = A^T$ orthogonal

46b) • Abgeschlossenheit: A, B orthogonal, $\det A = \det B = +1$

$$\rightarrow AB \text{ orthogonal (wie oben) und } \det(AB) = \det A \det B = +1$$

$$\text{also } AB \in SO(n)$$

- $\det(e) = \det(1_n) = +1 \quad \checkmark$
- $A \in SO(n) \rightarrow A$ invertierbar, $A^{-1} = A^T$ und
 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = +1$; also $A^{-1} \in SO(n) \quad \checkmark$

46c) • $O(1) = (\{-1, +1\}, \cdot)$ abelsch

• $O(2)$ nicht abelsch:

$$O(2) \ni R = \text{Rotation in } \mathbb{R}^2 \text{ um } \frac{\pi}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O(2) \ni S = \text{Spiegelung an } e_1\text{-Achse} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} R S e_1 = R e_1 = e_2 \\ S R e_1 = S e_2 = -e_2 \end{array} \neq \rightarrow RS \neq SR$$

- $O(n \geq 3)$ nicht abelsch: $R_n = \begin{pmatrix} R & \\ & 1_{n-2} \end{pmatrix} \in O(n)$
 $S_n = \begin{pmatrix} S & \\ & 1_{n-2} \end{pmatrix} \in O(n)$

mit oben $R_u S_u e_1 = e_2 \neq -e_2 = S_u R_u e_1$

- $SO(1) = (\{+1\}, " \cdot ")$ abelsch

- $SO(2) =$ Menge aller Rotationen im $\mathbb{R}^2$

(wegen $\det A = +1$ keine Spiegelungen)

mit Multiplikation $\hat{=}$ Verkettung

ist abelsch: $R_{\varphi_1} R_{\varphi_2} = R_{\varphi_1 + \varphi_2} = R_{\varphi_2} R_{\varphi_1}$.

- $SO(3) =$ Menge aller Rotationen im $\mathbb{R}^3$

mit Verkettung ist nicht abelsch:

$$\begin{array}{ccccc} R_{e_3, \frac{\pi}{2}} & R_{e_1, \frac{\pi}{2}} & e_1 & = & R_{e_3, \frac{\pi}{2}} e_1 = e_2 \\ \uparrow & \uparrow & & & \\ \text{Drehachse} & \text{Drehwinkel} & & & \neq \end{array} !$$

$$R_{e_1, \frac{\pi}{2}} R_{e_3, \frac{\pi}{2}} e_1 = R_{e_1, \frac{\pi}{2}} e_2 = e_3$$

- $SO(n \geq 4)$ nicht abelsch:

betrachte $R_{e_1, \frac{\pi}{2}}^{(n)} = \begin{pmatrix} R_{e_1, \frac{\pi}{2}} & \\ & \mathbb{1}_{n-3} \end{pmatrix}$

$$R_{e_2, \frac{\pi}{2}}^{(n)} = \begin{pmatrix} R_{e_2, \frac{\pi}{2}} & \\ & \mathbb{1}_{n-3} \end{pmatrix}$$

47) λ sei EW eines hermit. Ops. A zu EV u ,

$$\begin{aligned} \rightarrow \lambda |u|^2 &= \lambda \langle u, u \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \langle u, A u \rangle \stackrel{A=A^\dagger}{=} \langle A u, u \rangle \\ &= \langle \lambda u, u \rangle = \lambda^* |u|^2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \lambda = \lambda^* \rightarrow \lambda \text{ reell.}$$

48)

Vorlesung

 A, B simultan diagonalisierbar $\Leftrightarrow AB = BA$ $\Leftrightarrow AB$ symmetrisch

(*)

$$\text{hier: } \left. \begin{array}{l} A = A^+ = A^T \\ B = B^+ = B^T \end{array} \right\} \rightarrow BA = B^T A^T = (AB)^T$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{symmetrisch!} \rightarrow AB \text{ simult. diagonalisierbar}$$

gemeinsame Eigenbasis ist offenbar

$$E_{AB} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{nicht symmetrisch} \rightarrow \text{keine gem. Eigenbasis}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{nicht symmetrisch} \rightarrow \text{keine gem. Eigenbasis}$$

49) Für $i = 1, \dots, \ell$ sei $B_i = (e_1^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)})$ ONB des Eigenraums E_i der Dimension d_i

$$\rightarrow B = \bigcup_{i=1}^{\ell} B_i = (e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_{d_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, \dots, e_{d_2}^{(2)}, \dots, e_1^{(\ell)}, \dots, e_{d_\ell}^{(\ell)})$$

ist orthonormale Eigenbasis von A und für $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $v \in \{1, \dots, d_i\}$ ist einseitig

$$A e_v^{(i)} = \lambda_i e_v^{(i)}$$

andererseits $P_i e_v^{(i)} = e_v^{(i)}$ nur für $j=i$ $P_j e_v^{(i)} = 0$,

$$\text{also } \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j P_j e_v^{(i)} = \lambda_i e_v^{(i)}$$

→ damit Gleichheit von A und $\sum_j \lambda_j P_j$ auf Basis gezeigt

$$\rightarrow A = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j P_j \quad \bullet$$

b) Mit Eigenbasis B wie unter a) ist

$$\underline{f(A) e_v^{(i)}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{A^n e_v^{(i)}}_{\lambda_i^n e_v^{(i)}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_i^n \right) \underline{e_v^{(i)}} = \underline{f(\lambda_i) e_v^{(i)}}$$

und

$$\sum_j \underline{f(\lambda_j) P_j e_v^{(i)}} = \underline{f(\lambda_i) e_v^{(i)}}$$

$$\rightarrow \text{Gleichheit auf Basis } B \rightarrow f(A) = \sum_{j=1}^{\ell} f(\lambda_j) P_j \quad \bullet$$

50) Drehachse $\hat{u}$ ist EV zum BW 1 von A !

$$\rightarrow 0 = (A - 1I) \hat{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix} \hat{u}$$

$$\rightarrow \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \text{ ergänze } b_3 := \hat{u} \text{ durch}$$

$$\text{orthonormale } b_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ zu}$$

$$\text{ONB } B = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\rightarrow A b_1 = b_2, \quad A b_2 = -b_1, \quad A b_3 = b_3$$

$$\text{d.h. } B^A B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Drehwinkel } \varphi = \pi/2 : A = R_{\hat{u}, \pi/2} \quad \bullet$$