

Mathematik für Studierende der Physik II

Inhalt: Lineare Algebra:

- Vektoren und Vektorräume, Skalarprodukt
- lineare Abbildungen
- Determinante
- Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierung
- Tensorprodukt
- Tensoren
- orthogonale und unitäre Gruppe
- infinitesimale Transformationen

Fourier-Analysis:

- Fourier-Reihen
- Fourier-Transformation
- Delta-Distribution
- Anwendungen

Komplexe Analysis:

- komplexe Differenzierbarkeit
- Cauchysche Integralformel
- Residuensatz

Woza?



unbedingt notwendig in der

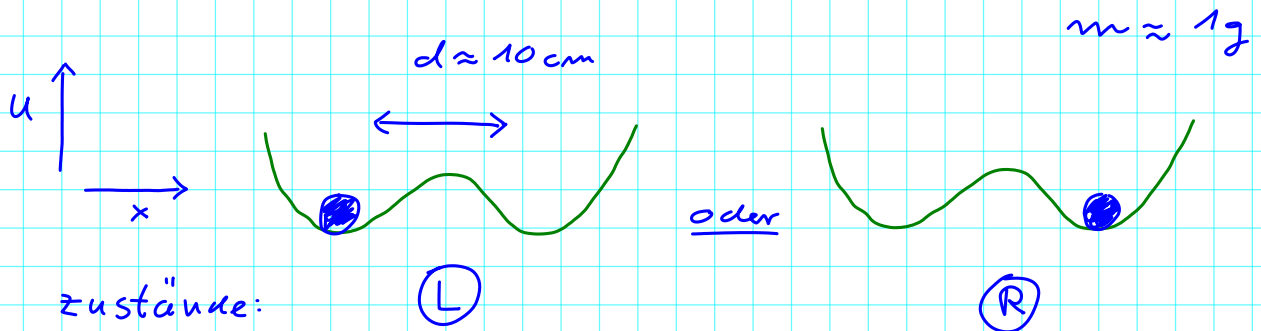
Quantenmechanik $\supset$ Physik der mikroskopischen Systeme

↳ charakteristische Eigenschaft:

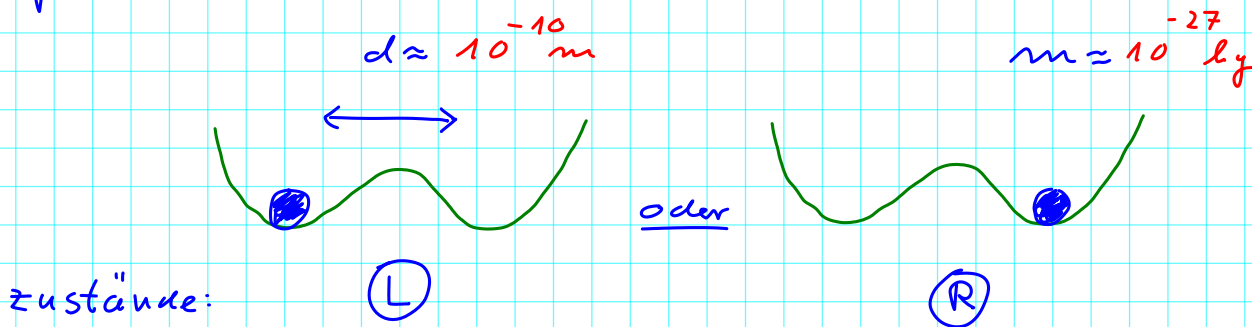
Überlagerungsfähigkeit der Zustände

etwa eines Teilchen im Doppelmuldenpotenzial:

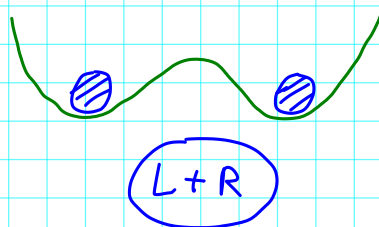
klassisch / makroskopisch:



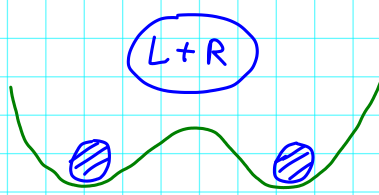
quantenmechanisch / mikroskopisch:



aber auch:



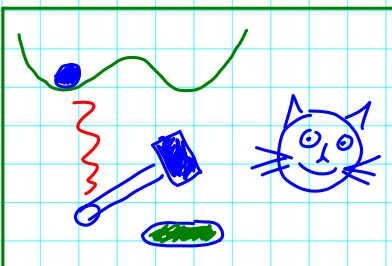
Überlagerung (= Superposition)
der Zustände (L) und (R)



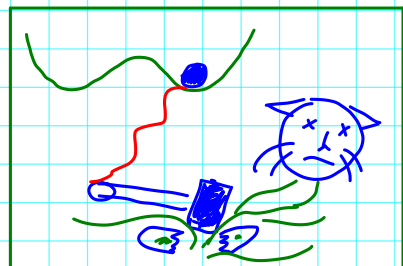
physikalische Bedeutung der Superposition?

- etwa:
- ① Teilchen tatsächlich links oder rechts, Beobachter weiß es nur nicht
 - ② Teilchen wechselt unbeobachtet rasch zwischen linker und rechter Mulde hin und her
 - ③ Teilchen tatsächlich zugleich in linker und rechter Mulde (auch für $d = 1\text{m}$, 1km , 100km ?!)

→ "Schrödingers Katze".



(L)



(R)

③ → $(L + R) \hat{=}$ Katze zugleich lebendig und tot ! ? ?

Schrödinger 1935

(R)

Aufklärung durch Experimente !

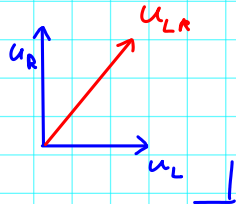
Voraussetzung: präzise Formulierung des Superpositionsprinzips

mittels geeigneter Mathematik: Lineare Algebra

2> 1. Postulat der QM: Zustandsraum $\hat{=}$ Vektorraum V
(Kurzversion)
Zustand $\hat{=}$ Vektor $u \in V$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \textcircled{L} &\hat{=} u_L \in V \\ \textcircled{R} &\hat{=} u_R \in V \\ &\quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad u_L + u_R =: \underline{\underline{u_{LR}}} \in V \\ &\quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \quad \quad \text{Vektoraddition} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \textcircled{L+R} \hat{=} u_{LR} \in V \quad !$$



d.h. gemäß QM ist $\textcircled{3}$ zutreffend

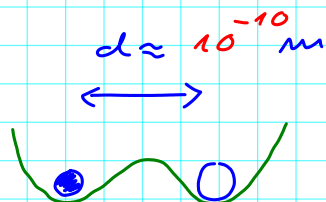
Experimente: stimmt !!

(c.f. Nobelpreis 2022 an A. Aspect, J. Clauser
A. Zeilinger)

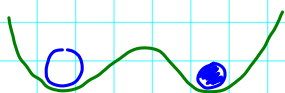
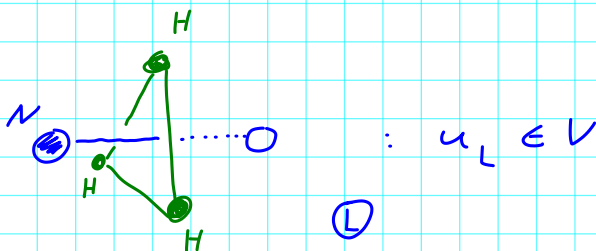
Warum nicht einfach nachschauen, was der Fall ist? (ohne Verwendung von Theorie / Mathematik!)

QM insbesondere Theorie der mikroskopisch kleinen Systeme:

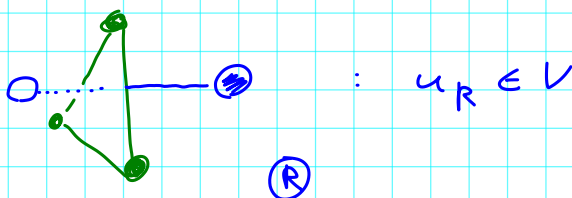
z.B. Ammoniak-Molekül: NH_3



$\hat{=}$

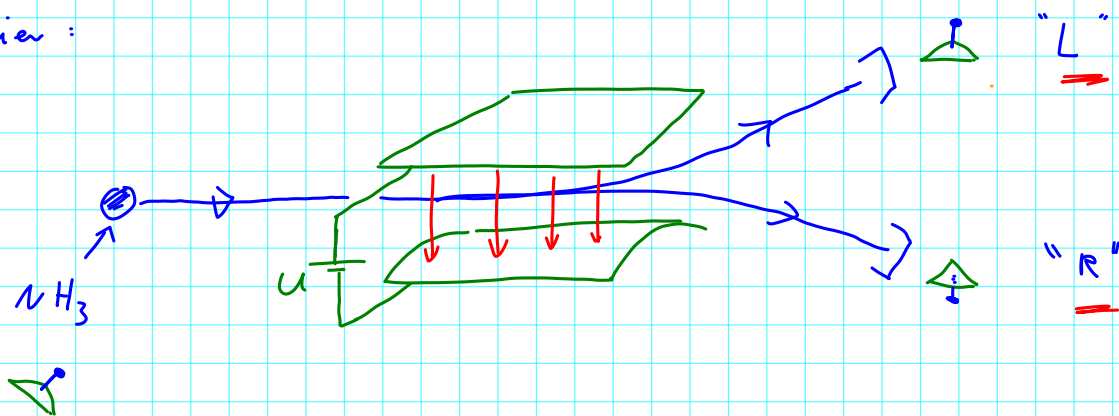


$\hat{=}$



→ nur indirekte "Beobachtung" durch geeignete Messapparatur möglich!

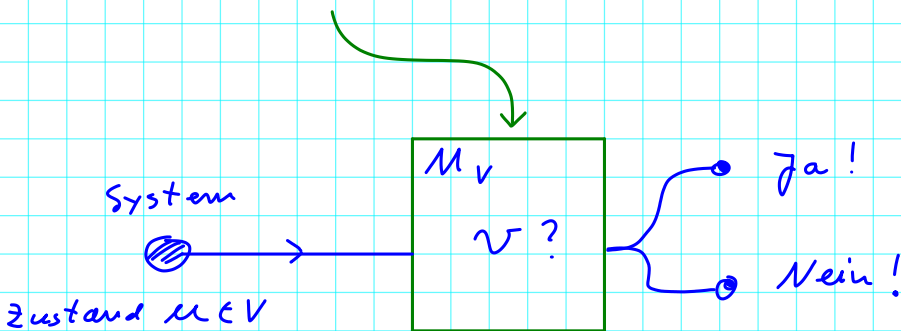
hier:



→ Messung fundamentaler Bestandteil der QM!

→ 2. Postulat der QM (Kurzversion)

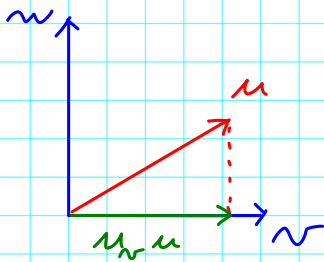
Zu jedem Zustand $\hat{=}$ Vektor $v \in V$ gibt es ein Messgerät $\hat{=}$ lineare Abb. $M_v: V \rightarrow V$
 $u \mapsto M_v u$



davon, dass Messung an System in Zustand u positiv mit Wahrscheinlichkeit

$$p = \langle u, M_v u \rangle = |M_v u|^2$$

$M_v: V \rightarrow V =$ Projektion auf v .



Verallgemeinerung mittels Eigenvektoren,
Eigenwerten hermitescher Operatoren

3. Postulat der QM:

(Dynamik)

Zeitentwicklung eines q.m. Zustands:

$$\psi(0) \xrightarrow{t} \psi(t) = \underline{U_t} \psi(0)$$

lineare Abb. $V \rightarrow V$

"Zeitentwicklungsoperator"

- infinitesimale Zeitentwicklung $\hat{\approx}$ Energie
- infinitesimale Translation $\hat{\approx}$ Impuls
- infinitesimale Rotation $\hat{\approx}$ Drehimpuls

"Welle - Teilchen - Dualismus" ?

Ortswellenfunktion

$$\psi(x)$$

Impulswellenfunktion

$$\hat{\psi}(p)$$

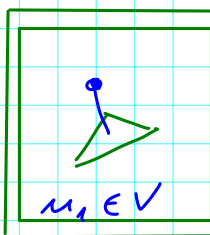
Fouriertrans-
formation

Funktion $\hat{=}$ Vektor ,

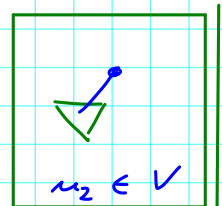
↳ Fouriertransformation $\hat{=}$ Basiswechsel

Tensorprodukt ?

betrachte zwei Systeme (z.B. zwei NH_3 Moleküle)



$r \approx 100 \text{ km!}$



Tensorprodukt

↳ gemeinsamer Zustand $u_{12} = u_1 \otimes u_2 \in V \otimes V$

oder $u_{12} = \underline{u_1} \otimes \underline{u_2} \in V \otimes V$

dann Superpos. i.A. $u_{12} + v_{12}$ verschränkter Zustand

- Schrödinger 1935
- Paradoxon von Einstein, Podolsky, Rosen
- Bellsche Ungleichungen
- Quantenkryptographie /-comp.

Literatur:

- Altland, von Delft: Mathematics for Physicists
- Arens, Hettlich, Karpfinger, Hochelhorn, Lichtenegger, Stachel: Mathematik
- G. Fischer: Lineare Algebra
- Fischer, Kaul: Mathematik für Physiker 1/2/3
- Jänich: Mathematik, geschrieben für Physiker
- Walter Appel: Mathematics for Physics & Physicists