

Wdhlg.:

Matrixäquivalenz

A äquivalent A' : $\Leftrightarrow$ es ex. en Automorphismen

S, T s.d.

$$A = T A' S$$

$\rightarrow$ Matrix A von Rang r äquiv. zu $A' = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

$\rightarrow$ Abbildungsmatrix A_B einer lin. Abb. A von Rang r äquiv. zu $\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

$\rightarrow$ Zeilenrang $\stackrel{!}{=} \text{Spaltenrang} \equiv \underline{\text{Rang}}$

neues Problem: möglichst einfache Abb. matrix

A_B eines Operators/Endom. $A: \underline{V} \rightarrow \underline{V}$!

$\rightarrow$ Determinante einer $n \times n$ Matrix A :

prob: $\det(A)$:= $\text{Vol}_n(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$

$\uparrow$

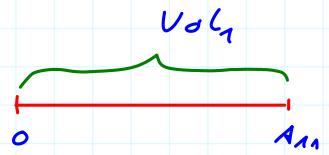
n -dim. (orientierte) Volumen

des durch Spaltenvektoren $A_1, \dots, A_n$
aufgespannten n -Spats

2

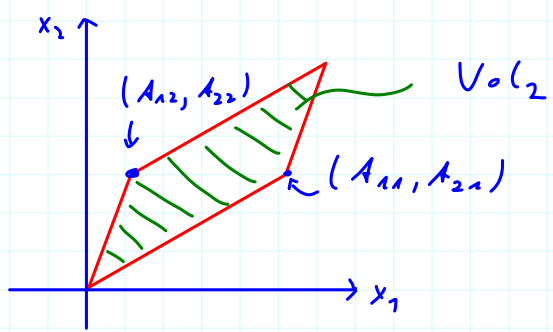
$n=1$:

$$\det(A_{11}) = A_{11}$$



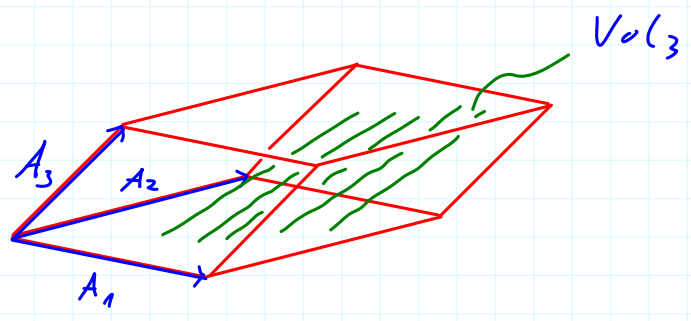
$n=2$:

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \right]_3 = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$$

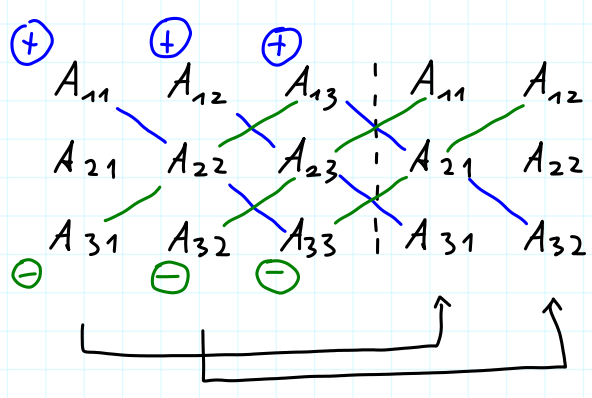


$n=3$:

$$\det(A_1, A_2, A_3) = \langle A_1 \times A_2, A_3 \rangle$$



$$= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22}A_{13} - A_{32}A_{23}A_{11} - A_{33}A_{21}A_{12}$$



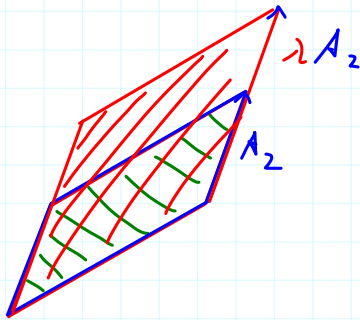
(Regel von Sarrus)

Vol_n für $n \geq 4$?

allg. Eigenschaften:

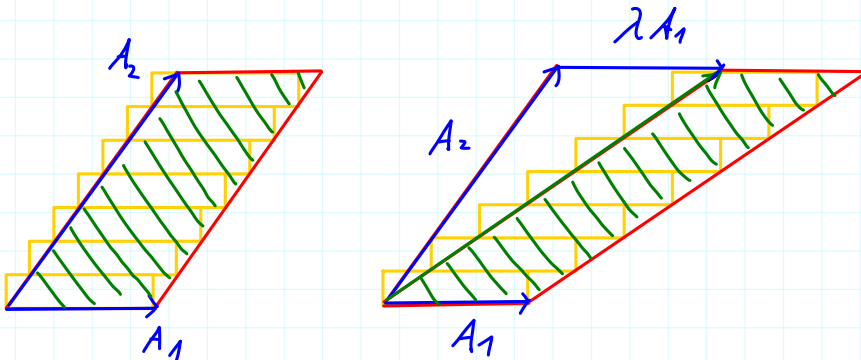
1) Skalierung:

$$\text{Vol}_n(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots) = \lambda \text{Vol}_n(A_1, \dots, A_i, \dots)$$

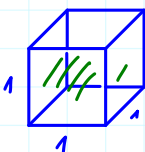


2) Scherinvarianz (Cavalierisches Prinzip)

$$\begin{aligned} \text{Vol}_n(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots) \\ = \text{Vol}_n(A_1, \dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots) \end{aligned}$$



3) Normierung:



$$\text{Vol}_n(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

→ Determinante

Def. Die Determinante $\det(A)$ einer $n \times n$ Matrix $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ ist eindeutig bestimmt durch

(D1) $\det(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots) = \lambda \det(A_1, \dots, A_i, \dots)$
(Skalierung)

$$(D2) \quad \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots) \quad (i \neq j)$$

$$= \det(A_1, \dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots)$$

(Scherinvarianz)

(D3) $\det(\mathbb{1}_n) = 1$ (Normierung)

→ weitere Eigenschaften, Folgerungen, ...

(D1): $\det(A_1, \dots, \underset{00_n}{a_i}, \dots, A_n) \stackrel{!}{=} 0 \quad \checkmark$

$$(D2): \det(A_1, \dots, A_i, \dots) \stackrel{!}{=} \det(A_1, \dots, A_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j A_j, \dots)$$

verallg. Scherinvarianz

(D2')

(D4): $A_1, \dots, A_n$ linear abhängig $\Rightarrow \det(A_1, \dots, A_n) = 0$

Γ informell: $\hookrightarrow \text{Vol}_n(A_1, \dots, A_n) \stackrel{!}{=} 0$;

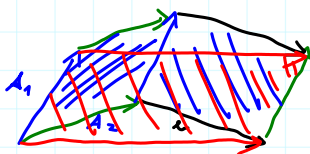
formal: ex. i_0 , s.d. $A_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \lambda_i A_i$!

$$\rightarrow \det(A_1, \dots, A_{i_0}, \dots) = \det(A_1, \dots, A_{i_0} - \underbrace{\sum_{j \neq i_0} \underbrace{1_j}_{=1_i} A_j, \dots)}_{=0} = 0!$$

(D5) Spalten-linearität:

$$\det(A_1, \dots, A_i + b, \dots) \stackrel{!}{=} \det(A_1, \dots, A_i, \dots) + \det(A_1, \dots, b, \dots)$$

geometrisch:
 $n=2$



Formel: 1. Fall: $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ linear abhängig,
 $A_1, \dots, b, \dots, A_n$ linear abhängig sein

$\rightarrow A_1, \dots, A_i + b, \dots, A_n$ linear abhängig!

$$\rightarrow 0 = \det(A_1, \dots, A_i + b, \dots) = \underbrace{\det(A_1, \dots, A_i, \dots)}_{=0} + \underbrace{\det(A_1, \dots, b, \dots)}_{=0} \quad \checkmark$$

seien $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ linear unabhängig

$$\rightarrow b = \lambda A_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j A_j \quad \checkmark$$

$$\det(\dots, A_i + b, \dots) \downarrow = \det(\dots, A_i + \lambda A_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j A_j, \dots)$$

(D2')

$$= \det(\dots, \underbrace{A_i + \lambda A_i}_{(1+\lambda)A_i}, \dots)$$

(D1)

$$= (1+\lambda) \det(\dots, A_i, \dots) \stackrel{(D1)}{=} \det(\dots, A_i, \dots) + \det(\dots, \lambda A_i, \dots)$$

(D2')

$$= \det(\dots, A_i, \dots) + \det(\dots, \lambda A_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j A_j, \dots) \quad \checkmark$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=b}$$

(DG) Antisymmetrie

$$\det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) = \ominus \det(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots)$$


$$\begin{aligned} \Gamma & \quad \det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) \stackrel{(D2)}{=} \det(\dots, A_i - A_j, \dots, A_j, \dots) \\ & \stackrel{(D2)}{=} \det(\dots, A_i - A_j, \dots, A_i, \dots) \\ & \stackrel{(D2)}{=} \det(\dots, \ominus A_j, \dots, A_i, \dots) \stackrel{(D1)}{=} (-1) \det(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots) \end{aligned}$$

(D7) $A_1, \dots, A_n$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \det(A_1, \dots, A_n) \neq 0$

$\Gamma \Leftarrow$ (D4) $\checkmark$

$\Rightarrow$ " Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ können durch $A_1, \dots, A_n$

dargestellt werden:

$$e_1 = \sum_i \lambda_{1i} A_i, \quad e_2 = \sum_i \lambda_{2i} A_i, \dots, \quad *1$$

$$0 \neq 1 = \det(e_1, \dots, e_n) \stackrel{(D4)}{=} \det\left(\sum_{i_1} \lambda_{1i_1} A_{i_1}, \sum_{i_2} \lambda_{2i_2} A_{i_2}, \dots\right)$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} \lambda_{1i_1} \lambda_{2i_2} \dots \lambda_{ni_n} \det(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n})$$

Spalten-Linearität

NB.:

$$\det(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}) = \begin{cases} 0 & : \text{zwei oder mehr \u00fcbereinstimmende Indices} \\ + \det(A_{j_1}, A_{j_2}, \dots) & : \text{falls } (i_1, \dots, i_n) \text{ durch \u201egeordnete\u201c Anz\u00e4hl von Vertauschungen auf } (1, 2, \dots, n) \text{ gebracht werden kann} \\ \ominus \det(A_{j_1}, A_{j_2}, \dots) & : \text{ " ungerade " } \end{cases}$$

(D9) Produktsatz : $A, B : n \times n$ Matrizen

$$\det(BA) \stackrel{!}{=} \det(B) \det(A)$$

2 $\rightarrow$ invertierbare Matrix A :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$\lceil$ $1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) \stackrel{!}{=} \det(A) \det(A^{-1})$ $\rfloor$

