Wdhlg.:

- $\boxed{\det(A^T) = \det(A)}$ $\Rightarrow$ "Zeilen wie Spalten":
    - Zeilen-Linearität
    - Zeilen-Antisymmetrie
    - Zeilen-Scherinvarianz
    - $\vdots$

- Laplace-Entwicklung:

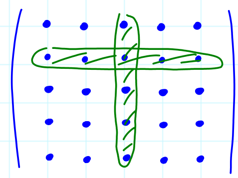
nach j_0-ter Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1} (-1)^{i+j_0} A_{ij_0} \det\left([A]_{ij_0}\right)$$

nach i_0-ter Zeile:

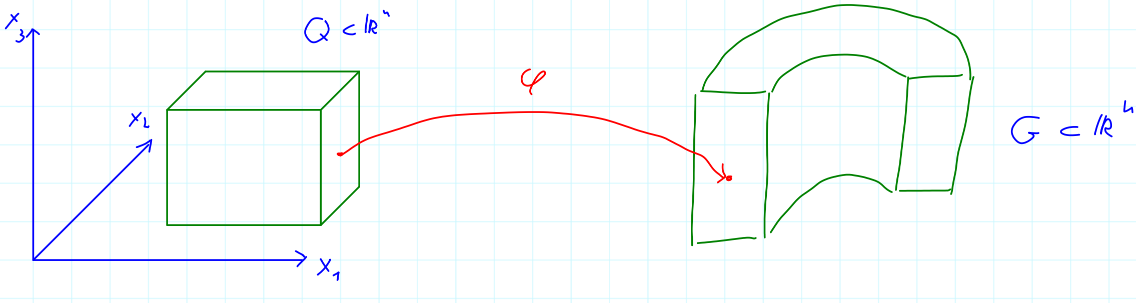
$$\det(A) = \sum_{j=1} (-1)^{i_0+j} A_{i_0 j} \det\left([A]_{i_0 j}\right)$$

$[A]_{23} =$



- Determinanten-Berechnung mittels Gauß-Verfahren

- n-dim. Integration:



Karte, Parametrisierung $\varphi: Q \to G$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

<u>Skalarfeld</u> $\quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad$ (z. B. <u>Dichte</u>)

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\int_G g \, dV := \int_Q g(\varphi(x)) \, |\det J_x \varphi| \, d^n x}$$

mit <u>Jacobi-Matrix</u>

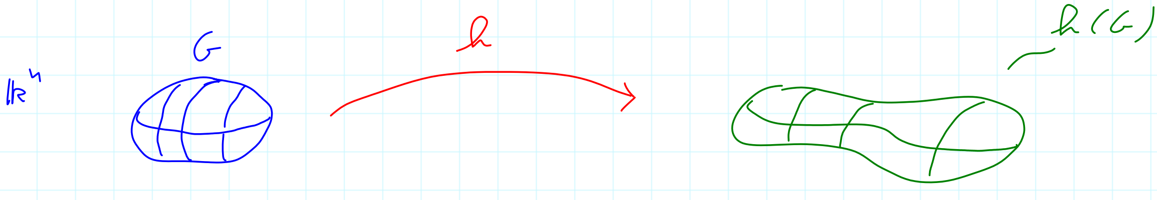
$$J\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

<u>Bezeichnungen / Notation:</u>

- $\det(J_x \varphi) \equiv$ <u>Jacobi-Determinante</u> $\equiv$ <u>Funktionaldeterminante</u>

$$\equiv \det \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots)}{\partial(x_1, x_2, \dots)}$$

<u>Transformationssatz</u> ($\hat{=}$ n-dim. Substitutionsregel)

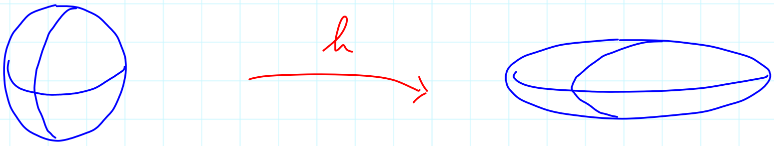


$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

bijektiv, differenzierbar

$$\rightarrow \quad \boxed{\int_{h(G)} g \, dV = \int_G g \circ h \, |\det(J h)| \, dV}$$

Beispiel:



K_1 = Kugel vom Radius 1

$Vol(K_1) \stackrel{!}{=} \frac{4}{3}\pi$ ✓

$E = h(K_1)$ = Ellipsoid mit Halbachsen a, b, c

$Vol(E) = ?$

Transformationssatz !

$h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a x \\ b y \\ c z \end{pmatrix}$

$\leadsto \quad Jh = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \to \det(Jh) = a b c$

$$\to \quad Vol(E) = \int_{\substack{E \\ \shortparallel \\ h(K_1)}} 1 \, dV \stackrel{\text{T.S.}}{=} \int_{K_1} 1 \, |\det(Jh)| \, dV$$

$$= abc \int_{K_1} 1 \, dV = \frac{4\pi}{3} abc \, .$$

$\ulcorner$

Zum Beweis des Transformationssatzes:

- $\varphi: Q \to G$ Karte von G

  $\to h \circ \varphi: Q \to h(G)$ Karte von $h(G)$

- verallg. Kettenregel:

  $J_x(h \circ \varphi) = J_{\varphi(x)} h \cdot J_x \varphi$

  Matrixmultiplikation

Produktsatz !

$$\longrightarrow \quad \det\left(J_x(h\circ\varphi)\right) = \det\left(J_{\varphi(x)} h\right)\det\left(J_x \varphi\right)$$

$$\longrightarrow \int_{h(G)} g \, dV = \int_G \underbrace{g\circ h}\circ\varphi(x)\,\left|\det\left(J_{\varphi(x)} h\right)\det\left(J_x \varphi\right)\right|$$

$$= \int_G g\circ h \,\left|\det\left(J_x \varphi\right)\right| \qquad \lrcorner$$

Zurück zum Hauptthema:

möglichst einfache Abb.-matrix eines Operators/Endo.

$A: \underset{B}{V} \to \underset{B}{V}$ durch geeignete Basiswahl !

ideal wäre Basis $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ derart, dass

$$\boxed{A(b_i) \overset{!}{=} \lambda_i b_i}$$

$$\longrightarrow \quad {}_B A_B = \left({}_B(\lambda_1 b_1), {}_B(\lambda_2 b_2), \dots, {}_B(\lambda_n b_n) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & \vdots & & \lambda_n \\ & 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Def.: A : Operator / Endomorph. / $n \times n$ Matrix

(i) v ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ

$$:\Longleftrightarrow \quad A v = \lambda v \quad \text{mit } v \neq 0$$

$$(A(v) = A v)$$

(ii) λ ist Eigenwert von A

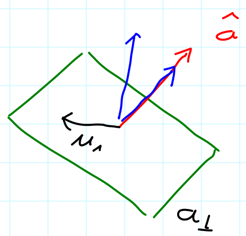
$:\Longleftrightarrow$ es. ex. Eigenvektor v von A zum Eigenwert λ

(iii) Eigenraum zum Eigenwert λ

$$E_\lambda = \{ v \in V \mid A v = \lambda v \}$$

(Untervektorraum von V)

Beispiel: 1) $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: Projektion auf $\hat{a} \in \mathbb{R}^3$



$P \hat{a} = 1 \hat{a}$: $\hat{a}$ Eigenvektor zum EW 1

↳ $\lambda \hat{a}$ " " " "

$$E_1 = \text{Span}\{\hat{a}\}$$

$$(P \underbrace{\lambda \hat{a}}_{v} = 1 \underbrace{\lambda \hat{a}}_{v})$$

$u \in a_\perp$: $P u = 0 = \underline{0}\, u$: u Eigenvektor zum EW $\underline{0}$

$$E_0 = a_\perp$$

"gute" Basis $\mathcal{B} = (\hat{a}, u_1, u_2)$; $u_1, u_2 \in a_\perp = E_0$

$$\Rightarrow \quad {}_B P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} ;$$

$${}_E P_E = \hat{a} \hat{a}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1 \; a_2 \; a_3)^T = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \dots \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & \dots \end{pmatrix}$$

$\perp$

2) $V = \mathbb{R}^3$: $Q = \mathbb{1} - P$: Projektion auf $a_\perp$

$Q\hat{a} = 0\,\hat{a}$: $\hat{a}$ Eigenvektor von Q zum EW 0

$u \in a_\perp$: $Qu = u = 1u$: u Eigenvektor " " " 1

$\Rightarrow \ {}_B Q_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E_0 = \mathrm{Span}\{\hat{a}\}$

$E_1 = a_\perp$

3) $A := rP + sQ$, $r, s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ A\hat{a} = (rP + sQ)\hat{a} = r\overbrace{P\hat{a}}^{\hat{a}} + s\overbrace{Q\hat{a}}^{0} = r\,\hat{a}$

d.h. $\hat{a}$ EV von A zum EW r

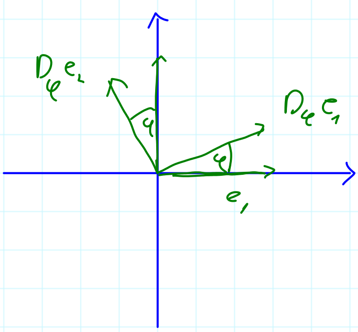
$u \in a_\perp$: $Au = (rP + sQ)\hat{u} = r\underbrace{P\hat{u}}_{= 0} + s\underbrace{Q\hat{u}}_{\hat{u}} = s\,\hat{u}$

d.h. $u \in a_\perp$ ist EV von A zum EW s

$\rightarrow \ E_r = \mathrm{span}\{\hat{a}\}$, $E_s = a_\perp$; $B = (\hat{a}, u_1, u_2)$

$\rightarrow \ {}_B A_B = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$

4) Drehung um Winkel $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $0 < \varphi < \pi$

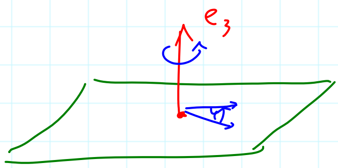


$\rightarrow$ D_φ besitzt weder EW noch EV!

5) Drehung im $\mathbb{R}^3$ um Achse e_3, Winkel φ, $0 < \varphi < \pi$

$D_{3,\varphi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$D_{3,\varphi}\, e_3 = 1\, e_3$



$\to$ e_3 EV von $D_{3,\varphi}$ zum EW 1

<u>Nachtrag</u>: Determinante und Spur für <u>Operator $A: V \to V$:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \det(A) &:= \det({}_B A_B) \\ Sp(A) &:= Sp({}_B A_B) \end{aligned}}$$

B beliebige Basis von V

⌈ Wohldefiniert? zeige, dass $\det(A)$, $Sp(A)$ unabhängig von Wahl der Basis!

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_{B'}A_{B'}"] & \mathbb{K}^n \\
V \arrow[u, "B'"] \arrow[d, "B"] \arrow[r, "A"] & V \arrow[u, "B'"] \arrow[d, "B"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_B A_B"] \arrow[uu, bend left, "S"] & \mathbb{K}^n \arrow[uu, bend right, "S"']
\end{tikzcd}$$

$S(e_i) = e_i'$

$${}_B A_B = S^{-1}\, {}_{B'}A_{B'}\, S$$

$\Downarrow$

d.h. ${}_B A_B$ <u>ähnlich</u> ${}_{B'}A_{B'}$

$\rightsquigarrow$ alle Abb.-matrizen eines Operators sind einander ähnlich!

29a) $\to$

$\det({}_{B'}A_{B'}) = \det({}_B A_B)$ ✓

wohldefiniert!

$Sp({}_{B'}A_{B'}) = Sp({}_B A_B)$ ✓

$$\boxed{A \text{ bijektiv} \iff \det(A) \neq 0}$$

Problem: gegeben ein Operator A,

finde Eigenwerte und Eigenvektoren!

Idee:

λ Eigenwert von A

$\iff$ es ex. $v \neq 0$ mit

$$A v = \lambda v$$

$$\iff A v - \lambda v = 0$$

$$\iff A v - \lambda \mathbb{1} v = 0$$

$$\iff (A - \lambda \mathbb{1}) v = 0$$

$$\left(\iff v \in \ker(A - \lambda \mathbb{1}) \right)$$

$\iff$ $(A - \lambda \mathbb{1})$ ist nicht bijektiv

$\iff$ $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$!

d.h. λ Eigenwert von A $\iff$ $\underbrace{\det(A - \lambda \mathbb{1})}_{= P(\lambda)} = 0$

Satz / Definition:

Die Eigenwerte eines Operators A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(x) := \det(A - x \mathbb{1}).$$

2) Methoden:

(I) rate Eigenvektor v $\rightarrow$ Eigenwert λ mittels
$$Av = \lambda v$$

(II) bestimme charakt. Polynom $P(X) = \det(A - X\mathbb{1})$

$\rightarrow$ Eigenwerte sind genau die <u>Nullstellen</u> von $P(X)$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

2) λ_i Eigenwert mit EV v:

$$Av = \lambda_i v$$
$$\Leftrightarrow \quad (A - \lambda_i \mathbb{1})v = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad v \in \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})$$

$$\rightarrow \quad E_{\lambda_i} = \operatorname{Kern}(A - \lambda_i \mathbb{1})$$

<u>Bsp</u>: $\quad A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

Eigenwerte, Eigenvektoren von A?

Methode II: $\quad P(X) := \det(A - X\mathbb{1}_2) = \det\begin{pmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{pmatrix}$

$$= (a-x)^2 - b^2$$

besitzt Nullstellen:
$$\lambda_{1/2} = a \pm b$$

$\rightarrow$ EV zum EW $\lambda_1 = a + b$

u

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (a+b)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zum EW $\lambda_2 = (a-b)$

v

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$