Wdhlg:

$f : V \to V$

- v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ

  g.d.w. $\boxed{A v = \lambda v}$ (Eigenwertgleichung)

  und $v \neq 0$

  A: Oper. / Matrix

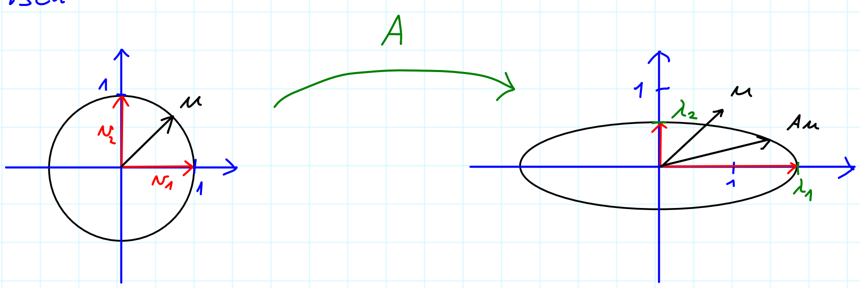
  $A(v) \equiv A v$

- Eigenraum zum EW λ

$$\boxed{E_\lambda = \{ v \in V \mid A v = \lambda v \}}$$

UVR!

geometrisch:



$B = (v_1, v_2)$; $A v_i = \lambda_i v_i$

$$\to \quad {}_B A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Eigenbasis

Bestimmung der Eigenwerte:

$$\lambda \text{ Eigenwert von } A \iff \det(A - \lambda \mathbb{1}) \overset{!}{=} 0$$

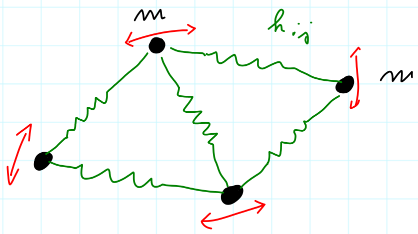
$\boxed{\text{Die Eigenwerte von } A \text{ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms } P(x) = \det(A - x\mathbb{1})}$

Eigenwert λ $\to$ Eigenraum $E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})$

$$= \{ v \mid A v = \lambda v \}$$

Anwendung in der Mechanik:

Eigenschwingungen eines mech. Systems



$X_i(t)$: Auslenkung aus stabile Gleichgewichtslage zur Zeit t

$\to$ rücktreibende Kräfte sind lineare Fkt. der Auslenkungen (!)

$$F \overset{!}{=} -Kx \qquad x \in \mathbb{R}^{3n}$$

$$F \in \mathbb{R}^{3n}$$

$$K \in M(3n \times 3n, \mathbb{R})$$

Newton: $\quad m\,\ddot{x}_i \overset{!}{=} F_i = -(Kx)_i \quad \left(= -\sum_\ell K_{i\ell}\, x_\ell \right)$

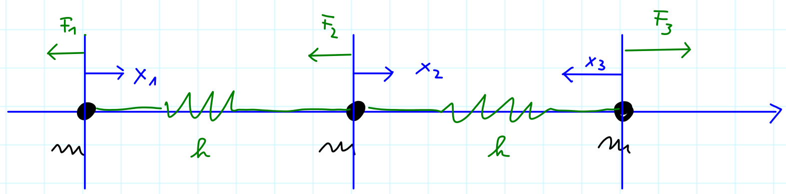
d.h. $\quad \ddot{x} = -\frac{1}{m} K x$

$\to$ Eigenschwingungen des Systems

charakterisiert durch:

Schwingungsmoden	$\longleftrightarrow$	Eigenvektoren von K
Schwingungsfrequenzen	$\longleftrightarrow$	Eigenwerte von K

Bsp.:



$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= -k(x_1 - x_2) \\ F_2 &= -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) \\ F_3 &= -k(x_3 - x_2) \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \quad F = -Kx \quad \text{mit} \quad K = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Massen $\underline{m}$, Kräfte $\underline{\underline{K}}$ $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ Eigenschwingungen

Newton: $\boxed{\ddot{x}(t) = -A\, x(t)}$ (*)

$A = \frac{1}{m} \underline{\underline{K}}$

(*) : <u>N - dim. lineare DGL 2. Ordnung</u> $(N = 3n)$

$\Rightarrow$ <u>Lösungsansatz</u> für Schwingungen

$$\boxed{x_\pm(t) = v_\omega\, e^{\pm i \omega t}}$$

$\underline{\omega} \in \mathbb{R}$: <u>Schwing.-frequenz</u>

$\underline{v_\omega} \in \mathbb{R}^N$: <u>Schwing.-mode</u>

Einsetzen in DGL (*):

$$\longrightarrow \quad \boxed{A\, \underline{v_\omega} = \underline{\omega}^2\, \underline{v_\omega}} \qquad \text{Eigenwertproblem!}$$

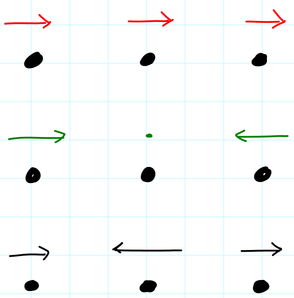
d.h. $\boxed{\omega^2 \text{ ist Eigenwert von } A = \frac{1}{m} K \text{ zum Eigenvektor } v_\omega}$

Bsp: $A = \frac{1}{m} K = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\rightsquigarrow P(x) = \det\left(A - x \mathbb{1}_3\right) \right)$

$\longrightarrow$ Eigenvektoren $\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu Eigenwerten $\underline{\lambda_1} = 0$, $\underline{\lambda_2} = k/m$, $\lambda_3 = 3k/m$

$\hat{=}$ 3 Eigenschwingungen:



$\omega_1 = 0$ ("Nullmode")

$\omega_2 = \sqrt{k/m}$

$\omega_3 = \sqrt{3k/m}$

Charakteristisches Polynom

A: Op. / Matrix, $\dim V = n$, $\mathbb{K}^n$

$\to$ $P(X) = \det(A - X\mathbb{1}_n)$, $\quad (A - X\mathbb{1}_n)_{ij} = A_{ij} - X\delta_{ij}$

$$= \det\begin{pmatrix} A_{11} - X & A_{12} & \cdots & \\ A_{21} & A_{22} - X & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & A_{nn} - X \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\,(A_{\sigma_1 1} - X\delta_{\sigma_1 1})(A_{\sigma_2 2} - X\delta_{\sigma_2 2}) \cdots\cdots$$

$\to$ (1) $\quad \operatorname{grad}(P(X)) = n$

(2) $\quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + (-X)^{n-1} Sp(A) + (-1)^n X^n$

$\ulcorner$

$$(A_{11} - X)(A_{22} - X)(A_{33} - X) \cdots (A_{nn} - X)$$

$$A_{11}(-X)^{n-1} + A_{22}(-X)^{n-1} + \cdots + A_{nn}(-x)^{n-1}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ii}\right)(-x)^{n-1} = Sp(A)\,(-x)^{n-1}$$

(3) für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad (P(z),\ x = z \in \mathbb{C})$:

Fundamentalsatz der Algebra: jedes nicht konst. Polynom hat mindestens eine Nullstelle im $\mathbb{C}$!

$\to$ jedes Polynom zerfällt in $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren:

$$P(z) \overset{!}{=} (z_1 - z)^{m_1} \cdot (z_2 - z)^{m_2} \cdots (z_k - z)^{m_k}$$

$\operatorname{grad}(P) = n$

k Nullstellen $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ mit Vielfachheiten (Multiplizitäten) $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$; $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.

für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $P(x)$ zerfällt in der Regel

<u>nicht</u> vollständig in Linearfaktoren!

→ <u>Folgerung</u> : in $\mathbb{C}$ besitzen Operatoren / Matrizen

immer mindestens einen Eigenwert!

<u>Beispiel</u> :

Drehmatrix $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

1) $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$: D_φ besitzt <u>keinen</u> EW !

2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $P(z) = \det\left(D_\varphi - z\,\mathbb{1}_2\right) = \det\begin{pmatrix} \cos(\varphi) - z & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos(\varphi) - z \end{pmatrix}$

$$= (\cos(\varphi) - z)^2 + \sin^2\varphi$$

$$= \cos^2\varphi - 2\cos(\varphi)\, z + z^2 + \sin^2\varphi$$

$$= z^2 - \underbrace{2\cos(\varphi)}_{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})} z + 1$$

$$\overset{!}{=} (z - \underline{e^{i\varphi}})(z - \underline{e^{-i\varphi}})$$

→ Nullstellen $\overset{!}{\hat{=}}$ EWe $\lambda_1 = e^{-i\varphi}$, $\lambda_2 = e^{+i\varphi}$!

→ Eigenvektoren: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi - i\sin\varphi \\ \sin\varphi + i\cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{2. Zeile: } i(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \underbrace{(\cos\varphi - i\sin\varphi)}_{= e^{-i\varphi}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

✓

Eigenvektoren und Eigenräume

wir zeigen: (A: Op. / Matr.)

(1) Eigenvektoren $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ sind linear unabhängig

(2) für Eigenwerte $\lambda \neq \mu$ ist $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$

(3) $\dim E_\lambda \leq m_\lambda$: Vielfachheit der Nullstelle λ im charakt. Polynom $p(x)$

zu (1): sei $\lambda_1 \underset{\neq}{\geq} \lambda_2 \underset{\neq}{\geq} \lambda_3 \underset{\neq}{\geq} \cdots \underset{\neq}{\geq} \lambda_\ell$

z.z.: $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_\ell v_\ell = 0 \implies \mu_i = 0$!

A

$$\mu_1 \lambda_1 v_1 + \mu_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \mu_\ell \lambda_\ell v_\ell = 0$$

$t > 0$

$$\underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^\ell A^\ell}{\ell!}}_{\exp(tA)} : \quad \mu_1 e^{t\lambda_1} v_1 + \mu_2 e^{t\lambda_2} v_2 + \dots + \mu_\ell e^{t\lambda_\ell} v_\ell = 0 \quad \Big|\, e^{-t\lambda_1}$$

$$\mu_1 v_1 + \underbrace{\mu_2 e^{t\underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{<0}} v_2 + \dots + \mu_\ell e^{t\underbrace{(\lambda_\ell - \lambda_1)}_{<0}}}_{\xrightarrow{t\to\infty}\ 0} = 0$$

$t \to \infty$

$\to \mu_1 = 0$

$\mu_2 = 0$

$\vdots$

$\mu_\ell = 0$.

(2) $\mu \neq \lambda$: $E_\mu \cap E_\lambda = \{0\}$: Übungsaufgabe,

zu (3): z. z.: $\dim E_\lambda \leq m_\lambda \in \mathbb{N}$

$d = \dim E_\lambda$, wähle beliebige Basis $(v_1, v_2, \dots, v_d)$ von E_λ

(also $A v_i = \lambda v_i$)

erweitere $(v_1, \dots, v_d)$ zu Basis

$$B = (v_1, \dots, v_d, b_{d+1}, \dots, b_n)$$

$$\rightarrow \quad {}_BA_B \underset{\overset{!}{A v_i = \lambda v_i}}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots\ \lambda & \\ \hline & 0 & & C_1 \end{array}\right) =$$

d

$$\hookrightarrow \quad p(x) = \det({}_BA_B - X \mathbb{1}_n) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda - x & & 0 & \\ & \lambda - x & & \\ & & \ddots\ \lambda - x & \\ & 0 & & C_1' \end{array}\right)$$

d

$= (\lambda - x)^d \cdot F(x)$: Nullstelle $x = \lambda$ mit $m_\lambda \geq d$!

„=": $F(x)$ könnte auch Nullstelle λ besitzen!

$\longrightarrow$ Diagonalisierbarkeitskriterium

$\dim V = n$

Op. / Matrix A diagonalisierbar

:<=> es ex. Basis B bestehend aus Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$,

B ist dann Eigenbasis

$$\Rightarrow \quad {}_BA_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$