

Wdhlg.:

$$A: V \rightarrow V, \dim V = n$$

- Charakt. Polynom: $P(x) = \det(A - x \mathbb{1}_V)$

- $\deg P = n$

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$P(z) = (\lambda_1 - z)^{m_1} (\lambda_2 - z)^{m_2} \dots (\lambda_h - z)^{m_h}$$

Nullstelle = Eigenwert

$$\sum_{i=1}^h m_i = n$$

- Eigenvektoren $v_1, \dots, v_h$ zu paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ sind linear unabhängig
- $\lambda \neq \mu \rightarrow E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$
- $\dim E_\lambda \leq m_\lambda$: Vielfachheit der Nullst. λ in $P(x)$

Def.:

A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ es ex. Eigenbasis

$$B = (v_1, \dots, v_n)$$

Eigenvektoren

$$\Rightarrow {}^B A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Diagonalisierbarkeitskriterien:

A diagonalisierbar

$\Leftrightarrow$

charakt. Polynom zerfällt vollständig in
Linearfaktoren: $P(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_h)^{m_h}$
und $\sum_{i=1}^h \dim E_{\lambda_i} = n$

$\hookrightarrow$ d.h. $\dim E_{\lambda_i} = m_i$
für $i = 1, \dots, h$

Adjunktion von Operatoren euklid. / unitären VR

V eukl. VR $\Rightarrow$ eukl. Skalarpod. : $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
 $u, v \mapsto \langle u, v \rangle$:

- Symmetrie $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- Positivität $\langle u, u \rangle > 0 \quad u \neq 0$
- Linearität $\langle u, v + \lambda w \rangle = \langle u, v \rangle + \lambda \langle u, w \rangle$

V unitären VR $\Rightarrow$ herm. Skalarpod. : $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$
 $u, v \mapsto \langle u, v \rangle$:

- Symmetrie $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}^*$
- Positivität $\langle u, u \rangle > 0 \quad u \neq 0$
- Linearität $\langle u, v + \lambda w \rangle = \langle u, v \rangle + \lambda \langle u, w \rangle$

$\hookrightarrow$ Orthogonalbasen

$B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ONB $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

Abbildungsmatrix von $A: V \rightarrow W$ bzgl. ONB

$B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ von V und $\mathcal{C} = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$:

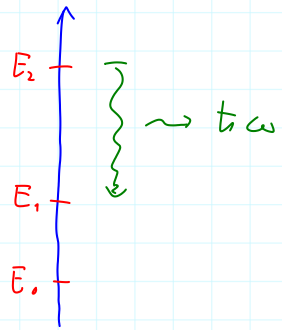
$$\rightarrow ({}_B A_B)_{ij} = \langle e'_i, A e_j \rangle$$

↑
Matrixelement von Op. A .

Γ GU: $V \equiv W$, $B = (e_1, e_2, \dots)$

↑
z.B. Energieeigenzustände eines H-Atoms

A : W, W -Op. von H-Atom
mit E.M. Feld



↳ Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$P_{i \rightarrow j} \sim |\langle e_i, A e_j \rangle|^2$$

(Bornsche Regel ...)

$$\Gamma \langle \underbrace{u, A v}_{\frac{1}{2}} \rangle = \langle \underbrace{A^* u, v}_{\frac{1}{2}} \rangle$$

Def: Adjunktion

lin. Abb. $A: V \rightarrow W$, $V, W \left\{ \begin{array}{l} \text{eukl.} \\ \text{unit.} \end{array} \right\} \forall A \in$

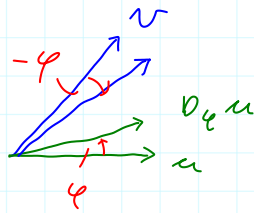
Die zu A adjungierte lin. Abb.

$$A^+ : W \rightarrow V$$

ist definiert durch

$$\langle u, A v \rangle_w = \langle A^+ u, v \rangle_v$$

für bel. Vektoren $u \in W, v \in V$

$$D_G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$


$$\langle \nu, D_\varphi \mu \rangle = \langle D_\varphi^+ \nu, \mu \rangle, \quad D_\varphi^+ = \underline{D_{-\varphi}}$$

Eigenschaften der Adjunktion ($\cong$ Rechenregeln...)

$$1) \quad (A + B)^+ = A^+ + B^+$$

$$2) \quad (\lambda A)^+ = \lambda^* A^+$$

3) $(AB)^T = B^T A^T$

4) $(A^{-1})^+ = (A^+)^{-1}$

5) $(A^+)^+ = A$

Abbildungsmatrix des adjungierten Operators:

$$A: V \rightarrow W$$

ONB $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ von V

ONB $\mathcal{E} = (e_1', e_2', \dots, e_n')$ von W .

$$\begin{aligned} ({}_{\mathcal{E}}A_B)_{ij} &= \langle e_i^{\dagger}, A e_j \rangle \stackrel{\text{Def.}}{=} \langle A^{\dagger} e_i^{\dagger}, e_j \rangle \\ &\stackrel{!}{=} \underbrace{\langle e_j, A^{\dagger} e_i^{\dagger} \rangle}_{\substack{\text{Symmetrie} \\ \text{des S.P.}}} = ({}_B A_{\mathcal{E}}^{\dagger})_{ji} \end{aligned}$$

$$\text{d.h.} \quad {}_B A^+_E = \left(({}_E A_B)^T \right)^*$$

$${}^u \text{Adjunktion} = \text{Transposition} + \text{kompl. Konjunktion} {}^u$$

BSD:

$$D_\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \hat{=} \quad D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow D_\varphi^+ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \ominus \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \ominus \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= D_{-\varphi} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Def.: Matrixadjunktion $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$

adjungierte Matrix $A^+ := (A^T)^*$

$$\lceil \hookrightarrow {}_B A_\varphi^+ = ({}_B A_\varphi)^+ \quad \checkmark \quad \rfloor$$

Def.: Operator $A: V \rightarrow V$ ist selbstadjungiert

$$: \Leftrightarrow A^+ = A$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: A selbstadjungiert $\equiv A$ hermitesch

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ " " $\equiv A$ symmetrisch

$\lceil$ Mechanik : Trägheitstensor : $I_{ij} := \int_G dx \, \rho(x) (\underbrace{|x|^2}_{\text{symmetrisch}} \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{symmetrisch}} - x_i x_j)$

$$\rightarrow E_{\text{rot}} = \langle \vec{\omega}, I \vec{\omega} \rangle = I_{ij} \omega_i \omega_j$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

d.h. I symmetrisch

$\equiv I$ selbstadjungiert!

$\rfloor$

selbstadjungierte Operatoren lassen sich immer diagonalisieren !! 😊

damit zeigen wir

Satz: Op. $A: V \rightarrow V$, $\dim V = n$, V unitäre VR,

$$\underbrace{AA^+ = A^+A}_{\text{d.h. "A normal"}}$$

$\Leftrightarrow$ es ex. orthonormale Eigenbasis zu A

d.h. "A normal"

A selbstadj. $\rightarrow A = A^+ \rightarrow AA^+ = AA = A^+A \rightarrow A$ normal

Lemma: A normal, $AA^+ = A^+A$:

$$\lambda \text{ EW von } A \text{ zum EV } v \Leftrightarrow \lambda^* \text{ EW von } A^+ \text{ zum EV } v$$

Bew: $G_\lambda := A - \lambda \mathbb{1}$, normal: $G_\lambda G_\lambda^+ = G_\lambda^+ G_\lambda$

$$\text{r.s. } \Leftrightarrow 0 = G_\lambda v \Leftrightarrow \langle G_\lambda v, G_\lambda v \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle v, \underbrace{G_\lambda^+ G_\lambda}_{=} v \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle v, G_\lambda G_\lambda^+ v \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle G_\lambda^+ v, G_\lambda^+ v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow G_\lambda^+ v = 0$$

$$\Leftrightarrow (A^+ - \lambda^* \mathbb{1}) v = 0$$

$$\Leftrightarrow A^+ v = \lambda^* v \quad \Leftrightarrow \text{r.s. !} \quad \square$$

Beweis um: $AA^+ = A^+A \Leftrightarrow A$ besitzt orthonorm. Eigenbasis

" $\Leftarrow$ " ✓

⇒ per Induktion über $n = \dim V$

$n=1$ ✓

$(n-1) \rightarrow n$: $A: V \rightarrow V$, $\dim V = n$, $K = \mathbb{C}$

→ charakt. Polynom $P(z)$ besitzt Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$,

→ A besitzt EW λ zum EV $v \in V$

→ $U \cup R$ $N^\perp := \{ u \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \}$

wir zeigen: $A|_{N^\perp}$ $A|_{N^\perp} \subset N^\perp$! (s.u.)

$\tilde{A} = A|_{N^\perp}$ ist normaler Operator: $\tilde{A} \tilde{A}^* = \tilde{A}^* \tilde{A}$,

nach Induktionsvoraussetzung ex. orthonormale

Eigenbasis $\tilde{B} = (v_1, \dots, v_{n-1})$

erweitert mit EV v ergibt orthonormale G.B.

$B = (v_1, \dots, v_{n-1}, v)$ ✓

zu $\star$: z. z. $u \in N^\perp \rightarrow Au \in N^\perp$

↳ $\langle u, v \rangle = 0$

z. z. $0 = \langle v, Au \rangle = \langle A^* v, u \rangle = \langle \lambda^* v, u \rangle$

$= \lambda \underbrace{\langle v, u \rangle}_{=0} = 0$

Lemma:
 v EV von A^*
zum EW λ^*

Diagonalisierbarkeit eines symmetrischen Operator:

$$\Rightarrow A = A^T,$$

$\rightarrow P(z)$ charakt. Polynom besitzt Nullstelle

$$\lambda = a + ib \in \mathbb{C}!$$

Zeige: wegen Symmetrie von A gilt $b=0! \rightarrow \lambda \in \underline{\mathbb{R}}!$

$$Av = \lambda v, \text{ mit } v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$v \in \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$\downarrow$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow A(x+iy) &= \lambda(x+iy) = (a+ib)(x+iy) \\ &= ax - by + i(bx + ay) \end{aligned}$$

$$Ax = ax - by \quad (i)$$

$$Ay = bx + ay \quad (ii)$$

$$A = A^T \rightarrow \begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &\stackrel{!}{=} \langle x, Ay \rangle \\ &\quad \text{" (i) } \qquad \text{" (ii) } \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow A = A^+$$

$$\hookrightarrow \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^+ y \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle ax - by, y \rangle &= \langle x, bx + ay \rangle \\ \cancel{a} \langle x, y \rangle - b \langle y, y \rangle &= \cancel{a} \langle x, y \rangle + b \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

$$0 = b \underbrace{(|y|^2 + |x|^2)}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow b = 0! \quad \Rightarrow \lambda = a + \cancel{ib} \quad \text{tatsächlich}$$

reellen EW von A !