Wdhlg.:

- Adjunktion: $A : V \to W \longleftrightarrow A^+ : W \to V$

$$\boxed{\langle w, Av \rangle_W = \langle A^+ w, v \rangle_V}$$

bzgl. ONB $\mathcal{B}, \mathcal{C}$:

$$_{\mathcal{B}}A^+_{\mathcal{C}} = \left({}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} \right)^+ := \left(\left({}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} \right)^T \right)^*$$

- $A : V \to V$ selbstadjungiert $\Longleftrightarrow$ $\boxed{A = A^+}$

$\left(\begin{array}{ll} V \text{ unitär: } & \text{"}A \text{ hermitesch"} \\ V \text{ euklidisch: } & \text{"}A \text{ symmetrisch"} \end{array} \right)$

- $A : V \to V$, V unitär

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\underbrace{A A^+ = A^+ A}_{\text{"}A \text{ normal"}} \Longleftrightarrow \text{es ex. orthonormale Eigenbasis zu } A}$

$\rightarrow$ selbstadjungierte Operatoren sind diagonalisierbar!

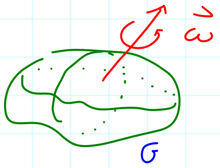
$\ulcorner$

$A = A^+ \rightsquigarrow A$ normal: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ✓

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: wegen $A = A^T$ EWe und EVen reell! ✓

$\lrcorner$

Bsp.: Mechanik des starren Körpers



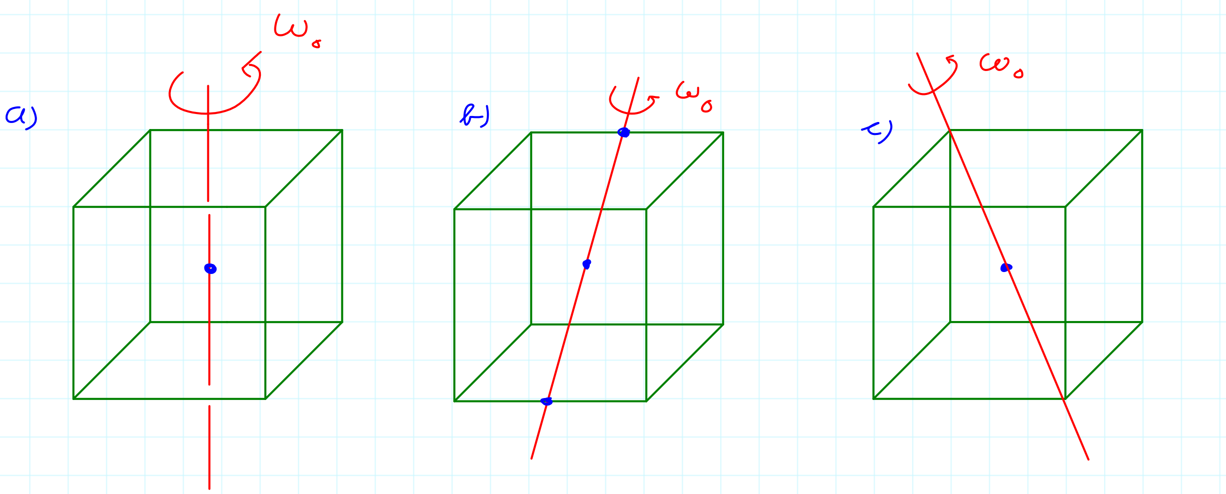
$\rightarrow$ Trägheitstensor $I \in M(3\times 3, \mathbb{R})$:

$$I_{ij} := \int_G d^3\vec{x}\; \rho(\vec{x})\left(|\vec{x}|^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right)$$

$\hookrightarrow$ $E_{Rot} = \frac{1}{2}\langle \vec{\omega}, I\vec{\omega}\rangle$: Rotationsenergie

$\vec{L} = I\vec{\omega}$: Drehimpuls

z.B. Rotation eines homogenen Würfels um Mittelpunktsachsen:



E_{Rot}: E_a E_b E_c

Kleinste/größte Rotationsenergie:

E_a, E_b oder E_c?

$$I_{ij} := \int_G d^3\vec{x}\; \rho(\vec{x}) \left(|\vec{x}|^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) \overset{!}{=} I_{ji}$$

Trägheitstensor I symmetrisch (reell selbstadj.) !

$\rightsquigarrow$ es ex. orthonormale Eigenbasis $B = (v_1, v_2, v_3)$

$\uparrow \; \uparrow \; \uparrow$

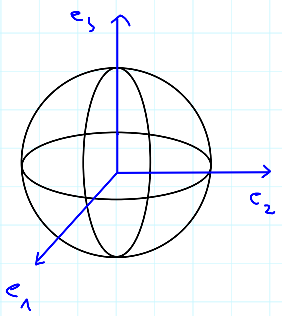
Hauptträgheitsachsen

und $${}_B I_B = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

Hauptträgheitsmomente (= EWe von I)

homogene Kugel

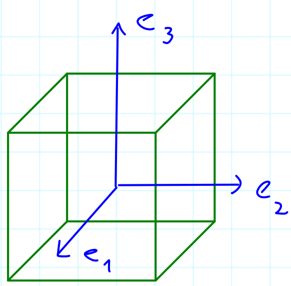


sphärische Symmetrie

$\rightsquigarrow \; v_i = e_i$!

$$I_K = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_1 & \\ & & I_1 \end{pmatrix} = I_1 \, \mathbb{1}_3$$

homogener Würfel



kubische Symmetrie

$\rightsquigarrow \; v_i \overset{!}{=} e_i$

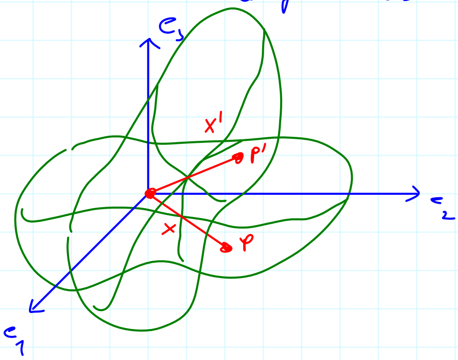
$$I_W = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_1 & \\ & & I_1 \end{pmatrix} = I_1 \cdot \mathbb{1}_3$$

d.h. $I_K \overset{!}{=} I_W \quad \rightarrow \quad E_a = E_b = E_c$!

$\rightsquigarrow$ Kugel-Rotation $\Leftrightarrow$ Würfel-Rotation !

Orthogonale Operatoren / Matrizen

Motivation: Lageveränderung eines starren Körpers



$\Rightarrow |x| = |x'|$!

P mit Ortsvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$

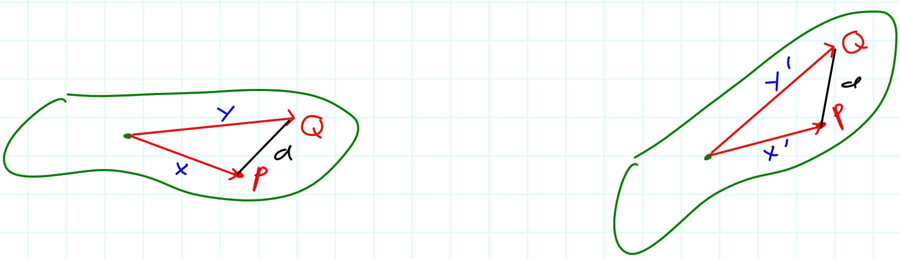
$x \to x'$ beschrieben durch Op. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$x' = A x$$

Z: für alle x. $|x| = |Ax|$

$\Longleftrightarrow$ für alle x, y: $\boxed{\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle}$ (*)

Aufgabe 16



$d = |x - y| \overset{!}{=} |x' - y'| = d'$

$$d = |x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y \rangle$$
$$d' = |x'-y'|^2 = |x'|^2 + |y'|^2 - 2\underbrace{\langle x', y' \rangle}_{= \langle Ax, Ay \rangle \overset{!}{=} \langle x, y \rangle}$$

ONB $(e_1, \dots, e_n) \longrightarrow (e_1' = Ae_1, \dots, e_n' = Ae_n)$ ONB !

$$\left.\begin{array}{l} i=j : 1 \\ i \neq j : 0 \end{array}\right\} =: \delta_{ij} = \langle e_j, e_i \rangle = \langle Ae_i, Ae_j \rangle = \langle e_i', e_j' \rangle \overset{!}{=} \delta_{ij} \;)$$

(*): für alle x, y : $\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, A^+ A y \rangle$

$\longrightarrow$ $\boxed{A^+ A = \mathbb{1}_3}$

Def: a) V eukl. VR, $A: V \to V$

A orthogonal $:\Longleftrightarrow$ $A^+ A = \mathbb{1}_V$

b) A reelle $n \times n$ Matrix

A orthogonal $:\Longleftrightarrow$ $A^T A = \mathbb{1}_n$

Eigenschaften: A sei orthogonal,

dann gilt:

$A^+ A = \mathbb{1}$

1) A^+ orthogonal

2) $|Av| = |v|$

3) $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$

4) A invertierbar und $A^{-1} = A^+$

5) $(e_1, \dots, e_n)$ ONB $\Longleftrightarrow$ $(Ae_1, \dots, Ae_n)$ ONB

6) $|\det A| = 1$

$\ulcorner$ $1 = \det \mathbb{1} = \det(A^+ A)$

$= \det(A^+) \det(A)$

$= \det(A^T) \det(A) = \det(A)^2$ $\lrcorner$

7) B ONB : • Spaltenvektoren von ${}_BA_B$ sind normiert und paarweise orthogonal

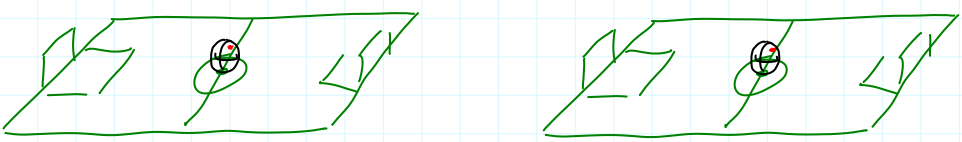
• Zeilenvektoren von ${}_BA_B$ sind normiert und paarweise orthogonal

8) $A^+A = \mathbb{1} = AA^+$: d.h. A normal

Orthogonale Abb. im 3 Dimensionen

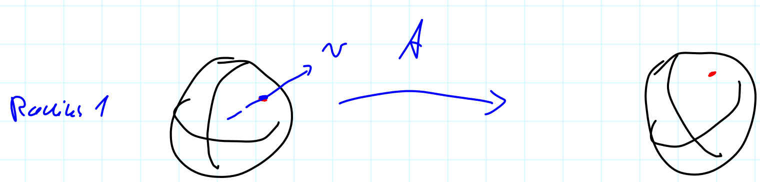
"Satz vom Fußball"

I. Anstoß 1. Halbzeit: $\xrightarrow[t]{1h}$ II. Anstoß 2. Halbzeit:



Beh: Auf der Oberfläche des Fußballs befindet sich mindestens ein Punkt, der sich bei I. und II. exakt an der selben Position befindet!

Beweis: Lageveränderung I. → II. sei beschrieben durch orthogonale Abb $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

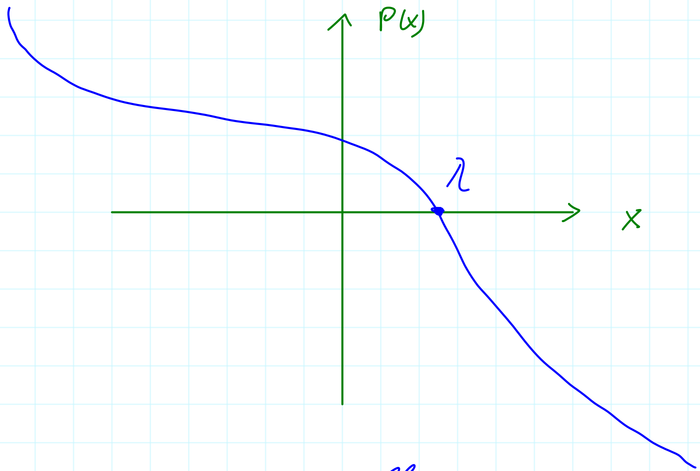


es genügt zu zeigen: $\boxed{A \text{ besitzt EW } 1 \text{ zum EV } v}$ (*)

$\Rightarrow$ Punkt P mit Ortsvektor $\hat{\underline{v}}$ bleibt unter A unverändert!

zu (*): charakt. Polynom von A:

$P(x) = \det(A - X \mathbb{1}_3)$ ist Polynom vom Grad 3!



$\rightarrow$ P(x) besitzt eine reelle Nullstelle λ!

d.h. λ EW von A $\rightarrow$ es ex. EV $\underline{v}$ zum EW λ!

$$|A v| = |v| \quad (A \text{ orthogonal})$$
$$|\lambda v| = |\lambda|\,|v|$$

$\rightarrow$ $|\lambda| = 1$: $\lambda = +1$! oder $\cancel{\lambda = -1}$

Warum $\lambda = +1$ und nicht $\lambda = -1$?

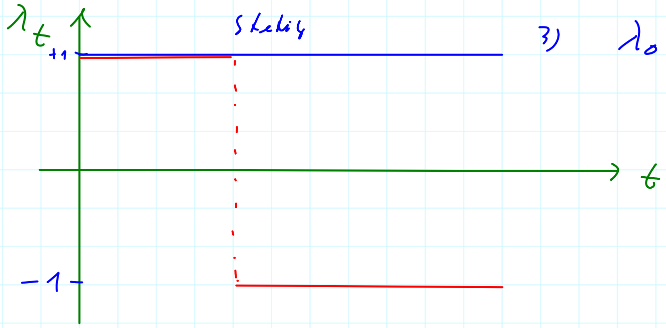
orthogonale Abb A_t beschreibe Lage des Balls zur Zeit $t \in [0, t_1]$ ← I.

$\rightarrow$ $A_0 = \mathbb{1}_3$: $t \longmapsto A_t$ stetig

λ_t sei EW von A_t : 1) $|\lambda_t| = 1$

2) $t \mapsto \lambda_t$ stetig !

3) $\lambda_0 = 1$



aufgrund Stetigkeit: λ_t konstant vom Wert 1 sein!

$|\det(A_t)| = 1$ (da A orthogonal)

aufgrund Stetigkeit $\det A_t = \det A_0 = \det \mathbb{1} = \underline{\underline{+1}}$!

2) Folgerung: $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ orthogonal, $\det A = +1$

→ ex. ONB $B = (v_1, v_2, v_3)$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

derart, dass

$${}_B A_B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & v_1 \end{pmatrix}$$

d.h. $A \hat{=}$ Drehung um geeignet gewählte Drehachse v_3 und -winkel φ

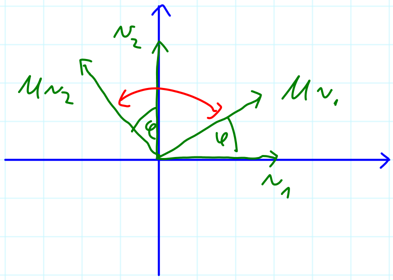
T wähle $v_3 = \hat{v}$, wobei v EV zum EW $\lambda = 1$!

→ ergänzen v_3 zu ONB $B = (v_1, v_2, v_3)$

→ $Av_3 = v_3$ → $${}_B A_B = \begin{pmatrix} \boxed{M} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$$ M : 2x2 Matrix

${}_B A_B$ orthogonal $\rightsquigarrow$ $\underline{\underline{M}}$ orthogonale 2×2

Matrix!



$\rightsquigarrow$ $M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ ${}_B A_B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$