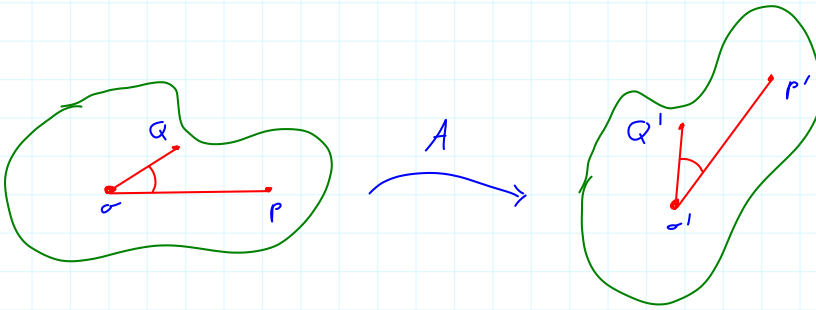


Wdhlg.:

Orthogonale Abbildungen

"lassen Längen und Winkel unverändert"



d.h.: $A: V \rightarrow V$ orthogonal $\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = \langle Au, Av \rangle$
 $\uparrow$
eukl. VR für alle u, v .

$\Leftrightarrow |u| = |Au|$
für alle u

$\Leftrightarrow$

$$A^T A = \mathbb{1}_V$$

$\Leftrightarrow$ reelle $n \times n$ Matrix A orthogonal $\Leftrightarrow A^T A = \mathbb{1}_n$

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

$$\langle A_i, A_j \rangle = \delta_{ij}$$

Bsp: $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ orthogonal und $\det A = 1$

$\rightarrow A$ = Rotation um geeignet gewählte Drehachse $\hat{u}$, Drehwinkel φ

d.h. mit ONB $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, $e'_3 = \hat{u}$:

$$B'^T A B' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Unitäre Operatoren / Matrizen:

Def.: a) unitären VR V , Op. $U: V \rightarrow V$

$$U \text{ unitär} \Leftrightarrow U^+ U = \mathbb{1}_V$$

$$\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = \langle Uu, Uv \rangle$$

für alle $u, v \in V$

$$\Leftrightarrow |u| = |Uu|$$

für alle $u \in V$

b) U komplexe $n \times n$ Matrix

$$U \text{ unitär} \Leftrightarrow U^+ U = \mathbb{1}_n$$

$$(u_1, \dots, u_n)$$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$$

Eigenschaften: U unitärer Op: $\rightarrow$

1) U^+ unitär

2) $U^{-1} = U^+$

3) ONB $(e_1, \dots, e_n) \xleftrightarrow{U}$ ONB $(Ue_1, \dots, Ue_n)$

4) $|\det(U)| = 1$

5) ONB $B \rightarrow {}_B U_B$ unitäre Matrix

6) $U^+ U = 1 = U U^+$: d.h. U normal

$\rightarrow$ es ex. orthonormale Eigenbasis $E = (e_1, \dots, e_n)$

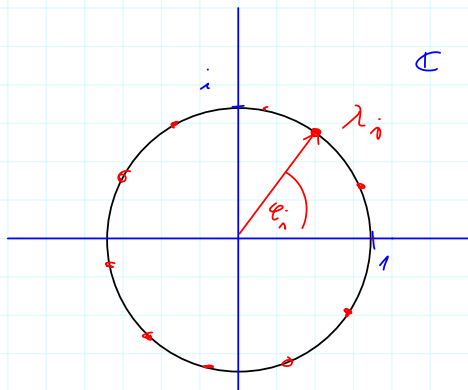
$${}_E U_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von U

mit $|\lambda_i| = 1$

┌

$$|e_i| = 1 = |U e_i| = |\lambda_i e_i| = |\lambda_i| \widetilde{|e_i|} = |\lambda_i|$$



$$\lambda_i = e^{i\varphi_i}$$

$$\varphi_i \in [0, 2\pi[$$

$${}^E U_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & \\ & e^{i\varphi_2} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}$$

┌

Unitäre Operatoren in der QM:

Zustandsraum $\hat{=}$ unitäre VR V
 Zustand $\hat{=}$ normierter Vektor $v \in V: |v|=1$

Zeitentwicklung sei beschrieben durch lineare (!) Abb.:

Zeitentwicklungsoperator $U_t: V \rightarrow V$

$\begin{array}{ccc} \text{Zustand} & \xrightarrow{t} & \text{Zustand} \\ \nu_0 & \xrightarrow{t} & \nu_t = U_t \nu_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{normiert!} & & \text{normiert!} \end{array}$

für beliebige ν_0 gilt: $|\nu_0| = |\nu_t| = |U_t \nu_0|$

→ der g.m. Zeitentwicklungsop U_t ist unitär!

Energieeigenbasis $E = (e_1, \dots, e_n)$ ist
(zu Eigenenergien $E_1, E_2, \dots, E_n$)

zugleich Eigenbasis von U_t !

$${}_E(U_t)_E = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1(t)} & & \\ & e^{i\varphi_2(t)} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix}$$

mit $\varphi_j(t) = -\omega_j t$, $\omega_j = E_j / \hbar$!

d.h.

$${}_E(U_t)_E = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_1 t} & & \\ & e^{-i\omega_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{-i\omega_n t} \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

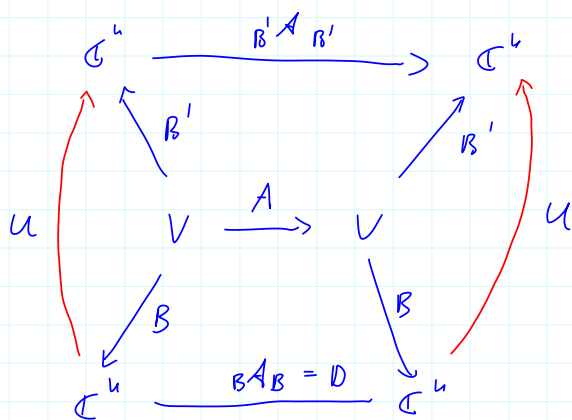
orthogonale/unitäre Diagonalisierung von symmetrischen/
hermiteschen Matrizen

$A: V \rightarrow V$ hermitescher Op. ($A^\dagger = A$)

→ es ex. orthogon. Eigenbasis $B = (b_1, \dots, b_n)$

$${}_B A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

unitäre ONB $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$: ${}_B A_{B'} = ?$



$$U e_i = e'_i$$

$$U^{-1} = U^*$$

a.l. ${}_B A_B = D = U^* {}_{B'} A_{B'} U \rightarrow {}_{B'} A_{B'} = U D U^*$

Eine hermitesche Matrix A (a.l. $A = A^*$)

kann unitär diagonalisiert werden;

a.l. es ex. unitäre Matrix U und Diagonalmatrix D derart, dass

$$A = U^* D U$$

Eine symm. Matrix A ($= A^T$) kann orthogonal

diagonalisiert werden, a.l. es ex. orth. Abb. σ

und Diagonalmatrix D derart, dass

$$A = \sigma^T D \sigma$$

g.m. Problem: gegeben hermitesche Operatoren A, B

o. eine gemeinsame Eigenbasis $E = (e_1, \dots, e_n)$?

Satz:

A und B simultan diagonalisierbar $\Leftrightarrow AB = BA$

" $\Rightarrow$ " $E = (e_1, \dots, e_n)$ sei gemeinsame Eigenbasis von A, B :

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad Be_i = \mu_i e_i$$

$$ABe_i = A\mu_i e_i = \mu_i Ae_i = \underbrace{\mu_i \lambda_i}_{B\lambda_i e_i} e_i = \underbrace{\mu_i}_{B\mu_i e_i} \lambda_i e_i = B\lambda_i e_i = B \overbrace{Ae_i}^{Ae_i} = BAe_i$$

für alle $i = 1, \dots, n \rightarrow AB = BA$

" $\Leftarrow$ " gelte $AB = BA$: $A, B: V \rightarrow V$

$\mu_1, \dots, \mu_k$ seien EWe von B mit Eigenräumen

$$V_i = E_{\mu_i}$$

$$\rightarrow V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$$

wir zeigen:

$$A(V_i) \subset V_i \quad (*)$$

$\Rightarrow A|_{V_i}: V_i \rightarrow V_i$ hermitescher Operator

$\leadsto$ besitzt EWe $\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_k^{(i)}$

$\rightarrow$ orthonormale Eigenbasis $E^{(i)} = (e_1^{(i)}, \dots, e_k^{(i)})$

zufällig orthonormale Eigenbasis von $B|_{V_i}$ zum EW μ_i

$\leadsto (E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(k)})$ ist gesuchte gemeinsame Eigenbasis.

zu 9d):

$$A(V_i) \subset V_i \quad !$$

zu zeigen $\rightarrow$: $\mu \in V_i \xrightarrow{A} A\mu \in V_i \quad ?$

$$\underline{B(A\mu)} = A(B\mu) = \mu_i(\underline{A\mu}) \rightarrow \text{d.h. } A\mu \text{ ist EV}$$

$$\uparrow \\ BA = AB$$

$$\uparrow \\ \mu \in V_i \\ B\mu = \mu_i \mu$$

zum EW μ_i : $\mu \in V_i$

damit $A\mu \in V_i \quad !$