Wdhlg.:

$U : V \to V$ unitär $\Longleftrightarrow$ $\langle v, w \rangle = \langle Uv, Uw \rangle$ für alle $v, w \in V$

unitären VR

$\Longleftrightarrow$ $|v| = |Uv|$ für alle $v \in V$

$:\Longleftrightarrow$ $\boxed{U^+ U = \mathbb{1}}$

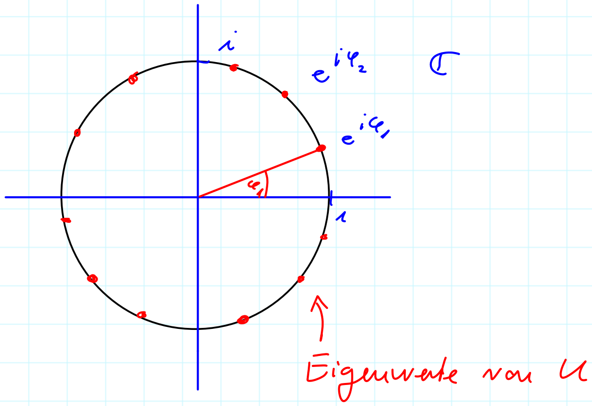
- komplexe $n \times n$ Matr. U unitär $:\Longleftrightarrow$ $U^+ U = \mathbb{1}_n$

$(u_1, \dots, u_n)$

$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$

bzgl. orth. Eigenbasis E:

$$ {}_E U_E = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & & \\ & e^{i\varphi_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} $$



unitäre Diagonalisierung

einer hermiteschen Matrix A $(= A^+)$:

$$A = \underbrace{U^+}_{\text{unitär}} \underbrace{D}_{\text{diagonal}} U$$

diagonal : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

orthogonale Diagonalisierung

einer symmetrischen Matrix A $(= A^T)$:

$$A = \underbrace{O^+}_{\text{orthogonal}} \underbrace{D}_{\text{diagonal}} O$$

- simultane Diagonalisierbarkeit :

herm. Op. A und B besitzen gemeinsame Eigenbasis ("sind simultan diagonalisierbar")

$\Longleftrightarrow$

$$\boxed{AB = BA}$$

$$\underbrace{A(V_i) \cancel{=} V_i}_{V_i:\ \text{Eigenraum zum } i\text{-ten EW von } B} \longrightarrow A(V_i) \subset V_i$$

Verknüpfungen von VRen: direkte Summe, Tensorprodukt

direkte Summe zweier $\mathbb{K}$-VRe V und W

$=$ $\mathbb{K}$-VR $V \oplus W$ gegeben durch

- Menge $V \times W = \{ (v, w) \mid v \in V,\ w \in W \}$

  (kartesische Produkt von V und W)

- Addition:

$$(v_1, w_1) \underset{V \oplus W}{+} (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

- Skalarmultiplikation:

$$\lambda (v, w) := (\lambda v, \lambda w)$$

oft: $V \times W \equiv V \oplus W$

Konvention:
$$V \ni v \equiv (v, 0_w) \in V \oplus W$$
$$W \ni w \equiv (0_v, w) \in V \oplus W$$

$$\leadsto \quad v + w = (v, 0_w) + (0_v, w) = (v, w)$$

Basen:
$B = (b_1, \dots, b_n)$ von V
$B' = (b_1', \dots, b_m')$ von W

$\leadsto$ $C = (b_1, \dots, b_n, b_1', \dots, b_m')$ Basis von $V \oplus W$

$$\rightarrow \quad \dim (V \oplus W) = \dim V + \dim W$$

allg.: direkte Summe von N $\mathbb{K}$-VRen $V_1, \dots, V_N$

$$= \mathbb{K}\text{-VR } V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_N \equiv \bigoplus_{i=1}^{N} V_i$$

- Menge $\quad V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_N$

- Add.: $\quad (v_1, v_2, \dots) + (\mu_1, \mu_2, \dots)$
$$= (v_1 + \mu_1,\; v_2 + \mu_2, \dots)$$

- S.M.:
$$\lambda (v_1, v_2, \dots) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots)$$

Bsp.:

$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} =$ VR $\mathbb{R}^2$

$\underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{N \text{ mal}} =$ VR $\mathbb{R}^N$

Tensorprodukt zweier VRe

Motivation:

$$\boxed{\text{Was ist der quantenmechanische Zustandsraum eines } N\text{-"Teilchen"-Systems?}}$$

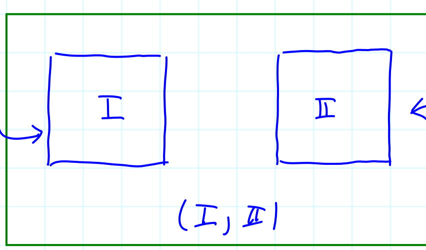
$N = 2$:

"Teilchen I" "Teilchen II"

Gesamtsystem (I, II)

unit. VR $\mathcal{H}_{I}$

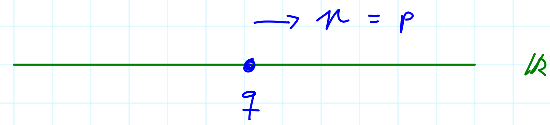
unit. VR $\mathcal{H}_{II}$



Tensorprodukt!

unit. VR. $\mathcal{H}_{I,II} \overset{!}{=} \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{II}$

Γ klassische Mechanik: Teilchen in 1D:



Zustand : $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2 = \Gamma_1$

2-Teilchen-Zust. : $x = (q_1, p_1, q_2, p_2) \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \Gamma_1 \times \Gamma_1 = \Gamma_2$

$\vdots$

N-Teilchen Zust : $x = (q_1, p_1, \dots, q_N, p_N) \in \mathbb{R}^{2N} = \Gamma_1 \times \Gamma_1 \times \Gamma_1 \times \dots \Gamma_1$

$$= (\Gamma_1)^N = \Gamma_N$$

$$\rightarrow \dim \Gamma_N = \underline{N} \dim \Gamma_1$$

QM : System = Spin (eines Elektrons, Ag-Atoms, ...)

$$\dim (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim(\mathcal{H}_1) \cdot \dim(\mathcal{H}_2) \quad !$$

1 - Spin : $\mathcal{H}_1 = \operatorname{span}\{u_\uparrow, u_\downarrow\}$ $\qquad \uparrow \quad \downarrow$

$\dim \mathcal{H}_1 = 2$ $\qquad$ „up" „down"

$\hat{=} \; u_\uparrow , \; u_\downarrow$

2 - Spin : $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \rightsquigarrow \dim \mathcal{H}_2 = 4$

$\vdots$

300 - Spins : $\mathcal{H}_{300} = \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1}_{300} = \left(\left(\mathcal{H}_1^{\otimes 300} \right)\right)$

$$\rightsquigarrow \dim \mathcal{H}_{300} = (\dim \mathcal{H}_1)^{300} = 2^{300} = (2^{10})^{30}$$

$$\simeq (10^3)^{30} = 10^{90} \ggg 10^{80} = \#\text{ Protonen}$$

im sichtb. Univ. !

Berechnung von 300 Spins ?

$\Rightarrow$ "Quantencomputer" mit 300 qubit $\hat{=}$ 300 Spin $1/2$

$\rightsquigarrow$ Quanten

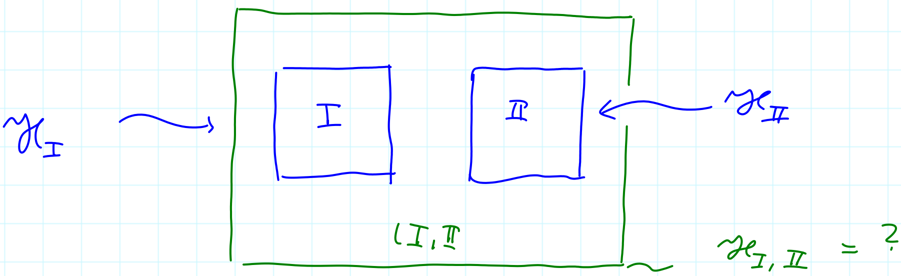
[

- Dynaversum
- ML4Q

]

Konstruktion des q.m. Zustandsraum $\mathcal{H}_{I,II}$ aus $\mathcal{H}_I$ und $\mathcal{H}_{II}$

$\hat{=}$ Def. des Tensorproducts $\mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{II}$:



<u>System I</u> : Größe A : n mögliche Messwerte

$a_1, a_2, \dots, a_n$ mit orthonormalen Eigen-

zustände $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathcal{H}_I$ $\rightsquigarrow$ orthonormale Basis von $\mathcal{H}_I$

<u>System II</u> : Größe B : m mögliche Messwerte

$b_1, b_2, \dots, b_m$ mit orthonormale Eigenzu

-stände $w_1, w_2, \dots, w_m \in \mathcal{H}_{II}$ $\rightarrow$ orthl. Basis von $\mathcal{H}_{II}$

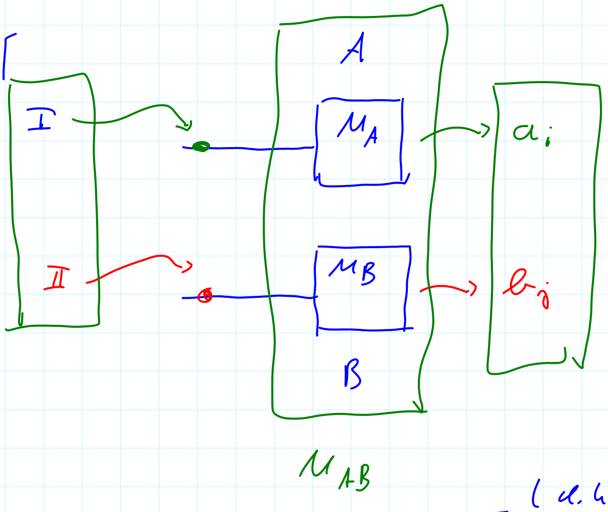
Gesamtsystem: Größe (A, B) !

mögliche Messwerte: $(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m),$

$(a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_m)$

$\vdots$

$(a_n, b_1), (a_n, b_2), \dots (a_n, b_m)$



(d.h. $n \cdot m$!)

→ entsprechend viele orthonormale Eigenzustände für (A, B):

$$\begin{array}{llll} v_1 \otimes w_1, & v_1 \otimes w_2, & \dots\dots, & v_1 \otimes w_m, \\ v_2 \otimes w_1, & v_2 \otimes w_2, & \dots\dots, & v_2 \otimes w_m, \\ \vdots & & & \\ v_n \otimes w_1, & \dots & , & v_n \otimes w_m. \end{array}$$

Superpositionsprinzip der QM:

$$\mathcal{H}_{I,II} \overset{!}{=} \mathrm{Span}\{ v_i \otimes w_j \}_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m}}$$

$\rightsquigarrow$ $\{ v_i \otimes w_j \}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ bilden Basis!

$$\dim \mathcal{H}_{I,II} = n \cdot m = \dim \mathcal{H}_I \cdot \dim \mathcal{H}_{II} \quad !$$

3) <u>Def</u>:

<u>Tensorproduktraum</u> zweier $\mathbb{K}$-VR V und W

$$V \otimes W = \operatorname{Span}\{ v_i \otimes w_j \}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

wobei $v_1, \dots, v_n$ Basis von V

$w_1, \dots, w_m$ Basis von W

<u>Tensorprodukt</u> $\quad \otimes : V \times W \longrightarrow V \otimes W$

$$(v, w) \longmapsto v \otimes w$$

definiert durch

$$v_i, w_j \longmapsto v_i \otimes w_j$$

und Linearität in beiden Faktoren:

$$a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$$

$$(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b$$

$$(\lambda a) \otimes b = \lambda (a \otimes b) = a \otimes (\lambda b)$$

d.h. $\quad \{ v_i \otimes w_j \}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ Basis von $V \otimes W$

$\rightarrow \quad \dim V \otimes W = \dim V \otimes \dim W$