Wdhlg.: **Tensorproduktraum** zweier $\mathbb{K}$-VRe :

$$\boxed{V \otimes W := \operatorname{Span}\{ v_i \otimes w_j \}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}}$$

Basis $v_1, \dots, v_n$ Basis $w_1, \dots, w_m$

$\rightarrow$ $v_1 \otimes w_1, \dots, v_1 \otimes w_m, v_2 \otimes w_1, \dots, v_2 \otimes w_m, \dots, \dots, v_n \otimes w_m$

Basis von $V \otimes W$

$$\Rightarrow \boxed{\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W}$$

Tensorprodukt: $\otimes : V \times W \longrightarrow V \otimes W$

$$(a, b) \longmapsto a \otimes b$$

def. durch

$$v_i, w_j \longmapsto v_i \otimes w_j$$

und **Linearität** in beiden Faktoren ("**Bilinearität**"):

$$\boxed{\begin{aligned} a \otimes (b_1 + b_2) &= a \otimes b_1 + a \otimes b_2 \\ (a_1 + a_2) \otimes b &= a_1 \otimes b + a_2 \otimes b \\ (\lambda a) \otimes b &= \lambda (a \otimes b) = a \otimes (\lambda b) \end{aligned}}$$

Basisunabhängigkeit des Tensorprodukts: V, W

I

$B = (v_1, \dots, v_n)$

$C = (w_1, \dots, w_m)$: $a \otimes b = \left(\sum_i a_i v_i\right) \otimes \left(\sum_j b_j w_j\right) = \sum_{ij} a_i b_j \, v_i \otimes w_j$ ✓

$a = \sum_i a_i v_i$

$b = \sum_j b_j w_j$

$\overset{!}{=}$?

II

$B' = (v_1', \dots, v_n')$

$C' = (w_1', \dots, w_m')$: $a \otimes b = \sum_{k,l} a_k' b_l' \, v_k' \otimes w_l'$ ✓

$a = \sum_k a_k' v_k'$

$b = \sum_l b_l' w_l'$

$$v_k' = \sum_i \alpha_{ki} v_i \quad (1)$$

$$w_l' = \sum_j \beta_{lj} w_j \quad (2)$$

$$= \sum_{ij} \underbrace{\left(\sum_k \alpha_{ki} a_k'\right)}_{= a_i \, !} \underbrace{\left(\sum_l \beta_{lj} b_l'\right)}_{= b_j \, !} v_i \otimes w_j$$

$$a = \sum_k a_k' v_k' \overset{(1)}{=} \sum_k a_k' \sum_i \alpha_{ki} v_i = \sum_i \underbrace{\left(\sum_k a_k' \alpha_{ki}\right)}_{= a_i \, !} v_i$$

$$b = \sum_l b_l' w_l' = \sum_j \underbrace{\left(\sum_l b_l' \beta_{lj}\right)}_{= b_j} w_j$$

$u \in V \otimes W$ i. a. R. ist u **nicht** als Tensorprodukt von geeigneten $v \in V$ und $w \in W$ darstellbar!

$$u \neq v \otimes w \quad \text{für alle } v \in V,\ w \in W.$$

Bsp: $V = W = \mathrm{Span}\{b_1, b_2\}$

$$V \otimes W \ni u = b_1 \otimes b_1 + b_2 \otimes b_2 \neq v \otimes w \quad \forall\, v \in V,\ w \in W$$

Def.: (QM)

- $u \in V \otimes W$ separabel $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, v \in V, w \in W$: $u \overset{!}{=} v \otimes w$

- $u \in V \otimes W$ verschränkt $:\Longleftrightarrow$ u **nicht** separabel

↑

Schrödinger 1935

Tensorprodukt zweier Operatoren:

$A: V \to V$, $\quad B: W \to W$ linear

$\to \quad A \otimes B : V \otimes W \to V \otimes W$

def. durch $\quad (A \otimes B)(a \otimes b) := (Aa) \otimes (Bb)$

+ Linearität!

$\leadsto \quad u = \sum_{ij} u_{ij}\, v_i \otimes w_j$:

$$(A \otimes B)\, u = \sum_{ij} u_{ij}\, A \otimes B (v_i \otimes w_j) = \sum_{ij} u_{ij} (A v_i) \otimes (B w_j)$$

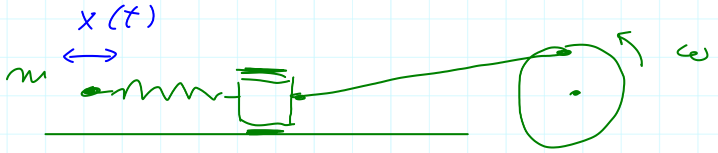
✓

Fourierreihe, Fouriertransformation

Motivation:

harm. Oszillator: + ext. Kraft ("harmonisch")

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad f(t) = f_0 \cos(\omega t)$$



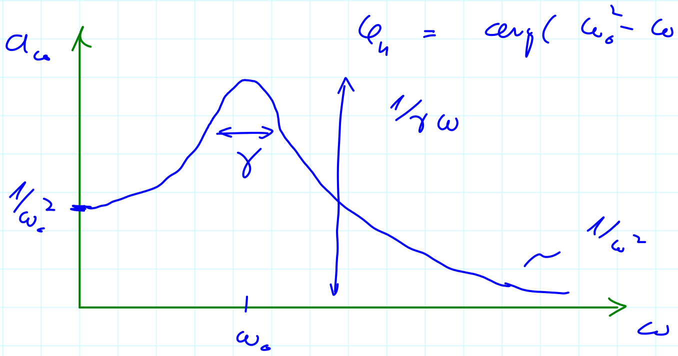
$$\rightsquigarrow \quad \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t} \qquad (\mathrm{Re} \dots \to x(t))$$

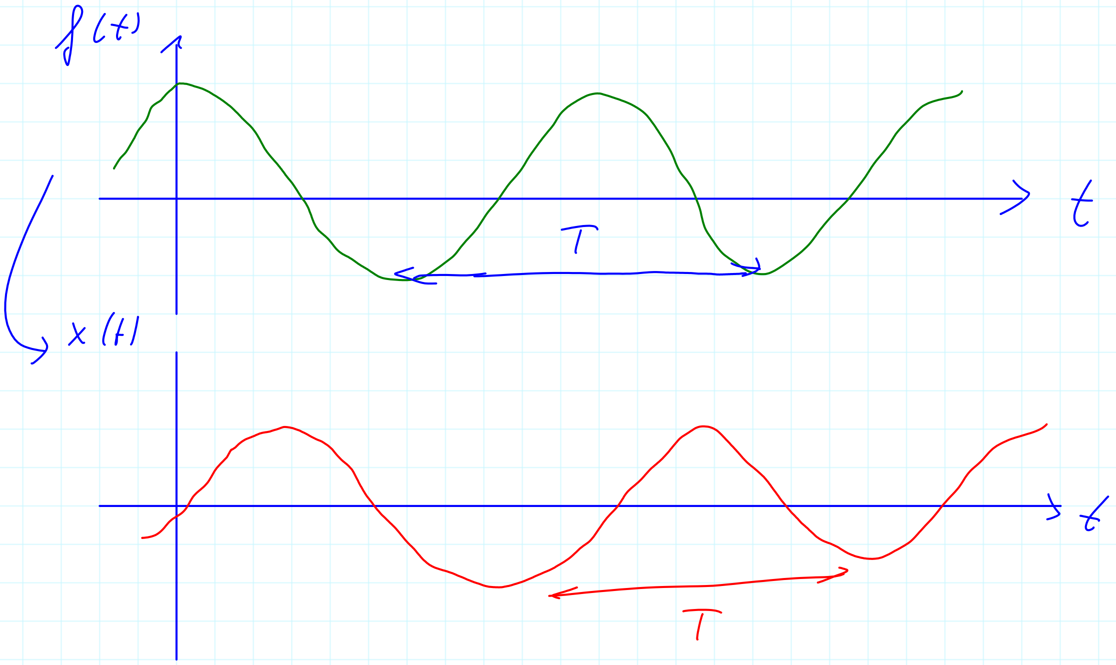
$\rightsquigarrow$ erzwungene Schwingung $x(t)$

$$x(t) = a_\omega \cos(\omega t - \varphi_\omega)$$

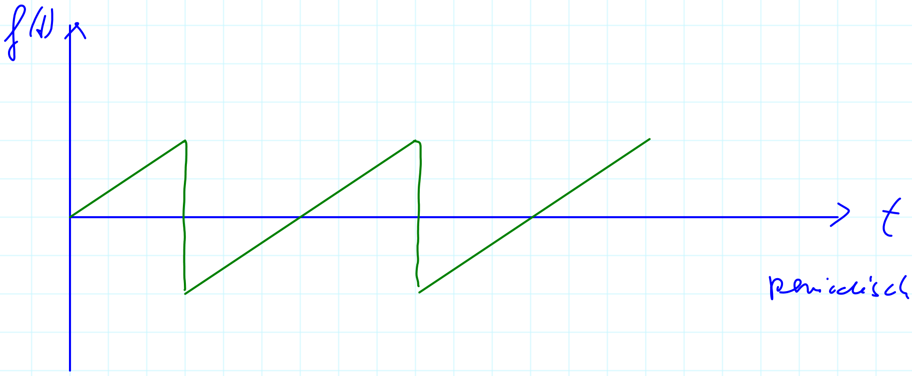
$$a_\omega = \left| \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right|$$

$$\varphi_\omega = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$$





Neues Problem: Oszillatorantwort $x(t)$ auf allg. (periodische) Kraft $f(t)$?



zuerst: $f(t)$ sei eine T-periodische Funktion

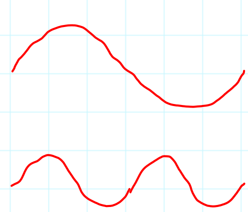
Lösungsstrategie: Rückführung auf $f \propto e^{i\omega t}$,

+ Fourierreihendarstellung von $f(t)$!

$f(t)$ T-periodisch, d.h. $f(t) \overset{!}{=} f(t+T) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$,

↳ Fourier (1768 – 1830):

Stelle T-period. Funktion dar durch Überlagerung von $\omega = 2\pi/T$



- Grundschwingung: $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$
- 1. harmonische: $\cos(2\omega t)$, $\sin(2\omega t)$
- 2. harmonische: $\cos(3\omega t)$, $\sin(3\omega t)$ ...

$\vdots$

- n. harmonische: $\cos(n\cdot\omega t)$, $\sin(n\omega t)$

d.h. $$\boxed{f(t) \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^c \cos(\omega_n t) + f_n^s \sin(\omega_n t)}$$

T-periodisch

$f(t) = f(t+T) \quad \forall t$

$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \cdot n$

$n \in \mathbb{N}$

einfuhren mit: $\cos(\omega_n t) = \left(e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}\right)/2$

$\sin(\omega_n t) = \left(e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}\right)/2i$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{i\omega_n t}}$$

$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n \qquad n \in \mathbb{Z}$

- Fourierreihe der T-per. Fkt. $f(t)$
- f_n : n-te Fourierkoeffizient

erzw. Schw. und $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{f_n e^{i\omega_n t}}$

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n a_{\omega_n} \cos(\omega_n t - \varphi)$$

Bestimmung der Fourierkoeff. einer T-per. Fkt $f(t)$?

hilfreich: Menge der T-period. Fkten $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bilden komplexen VR

noch hilfreicher: herm. Skalarprodukt: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-per.

$$\boxed{\langle f, g \rangle := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^*(t)\, g(t)\, dt}$$

(vgl. Aufg. 9), $T = 2\pi$)

$\rightarrow$ unitären VR

$\rightarrow$ orthonormales System an Funktionen:

$$\left\{ e_n : t \mapsto e^{i \omega_n t} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

es gilt: $\boxed{\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}}$ (vgl. Aufgabe 9)
$t \to T\tau$

F. R.: $$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \underbrace{e^{i \omega_n t}}_{e_n(t)} \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \quad f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e_n$$

F. R. $\hat{=}$ Komponentendarst. bzg. $\{ e_n \}_{n \in \mathbb{Z}}$!

$$\rightarrow \quad f_n = \langle e_n, f \rangle \; !$$

d.h.

$$\boxed{f_n = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\omega_n t}\, dt}$$

$e_n : t \to e^{i\omega_n t}$ $\qquad\qquad$ $\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$