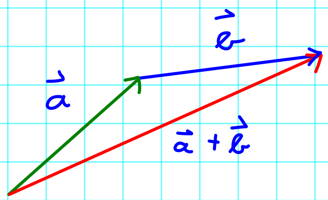
Vektoren und Vektorräume (vgl. MaPhy I, Kap. 1)

→ **kurz:** Vektoren sind Objekte, die sich genau wie Translationen addieren und mit einem Skalar multiplizieren lassen:



Vektoraddition:

„+“ : $\vec{a}, \vec{b} \longmapsto \vec{a}+\vec{b}$

→ **Eigenschaften:**

(A1) Assoziativität: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(A2) Existenz des Nullvektors $\vec{0}$:

$$\vec{a}+\vec{0} = \vec{a} \qquad (\text{für alle } \vec{a})$$

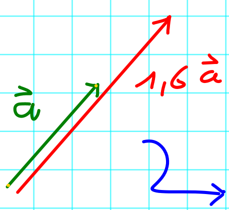
(A3) Existenz des inversen Vektors $-\vec{a}$ zu $\vec{a}$:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

(A4) Kommutativität:

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$$

Skalarmultiplikation:



$$\lambda, \vec{a} \longmapsto \lambda\vec{a}$$

→ **Eigenschaften:**

(S1) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

(S2) $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

(S3) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

(S4) $1\vec{a} = \vec{a}$

Def: <u>Vektorraum</u> = Menge V mit

<u>Vektoraddition</u>: $V \times V \longrightarrow V$

$a, b \longmapsto a + b$

gemäß Eigenschaften (A1 – A4)

und <u>Skalarmultiplikation</u> $\mathbb{K} \times V \longrightarrow V$

$\lambda, a \longmapsto \lambda a$

gemäß Eigenschaften (S1 - S4).

Die Elemente von V nennen wir <u>Vektoren</u>

Bemerkungen: 1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: V reeller Vektorraum

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: V komplexer " "

$\mathbb{K}$ unbest.: V $\mathbb{K}$-Vektorraum

2) ab sofort lassen wir Vektorpfeile weg: $\cancel{\vec{a}}$

⌈ erste Ausnahme: Ortsvektor: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ... ⌋

<u>Beispiele</u>:

1) Menge der n-Tupel über $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}^n = \left\{ a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{K} \right\}$$

mit Vektoraddition:

$$a + b := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \checkmark$$

und Skalarmultiplikatio:

$$\lambda a := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \checkmark$$

(A1 – A4) ?

(A1) : Assoziativität :

z.z.: $a+(b+c) \overset{?}{=} (a+b)+c$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1+c_1 \\ \vdots \\ b_n+c_n \end{pmatrix}}_{=\,b+c}}_{=\,a+(b+c)} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}}_{=\,a+b} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n+c_n \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n+c_n \end{pmatrix}$$

(A4) Kommutativität ✓

(A2)

Nullvektor $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(A3) Inverses $-a$ zu $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$-a = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} \quad ✓$$

(S1 – S4) der Skalarmultiplik. ✓

2) Menge der ganzrat. Fkten maximal k-ten Grades : $K = \mathbb{R}$

$$P_k = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k \}$$

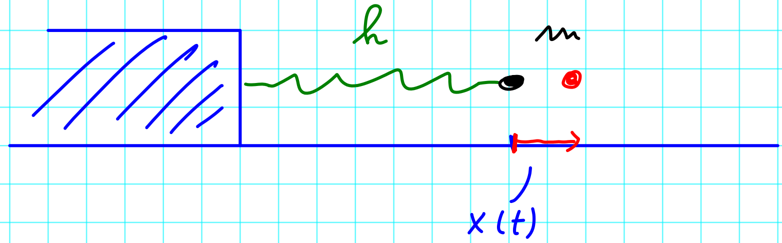
mit Vektoraddition : $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ ✓ $\forall x \in \mathbb{R}$

u. Skalarmultiplik. : $(\underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} f)(x) := \lambda f(x)$ ✓

(A1 - A4) ✓ (S1 - S4) ✓

3) Harmonische Schwingungen:

z.B. eines mech. Oszillators:



$x(t)$ = Auslenkung aus Ruhelage bei $x=0$ zur Zeit t

$x(t)$ genügt DGL: $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

"Harmonische Schwingungen" = Lösungsraum der DGL

$$L = \left\{ \begin{array}{l} x: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto x(t) \end{array} \;\middle|\; \ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0 \text{ für alle } t \right\}$$

mit Addition und Skalarmultipl. wie unter 2):

$$(\underset{\in L}{x_1} + \underset{\in L}{x_2})(t) := x_1(t) + x_2(t)$$

$$(\lambda \underset{\in L}{x})(t) := \lambda x(t)$$

Wohldefiniert? $x_1, x_2 \in L$ ist dann $y = x_1 + x_2 \in L$?

$$\ddot{y} + \gamma \dot{y} + k/m\, y \overset{?}{=} 0, \qquad \left.\begin{array}{l} \dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ \ddot{y} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 \end{array}\right\} (*)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \gamma(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + k/m(x_1 + x_2)$$

$$= \underbrace{\ddot{x}_1 + \gamma \dot{x}_1 + k/m\, x_1}_{=0 \text{ da } x_1 \in L} + \underbrace{\ddot{x}_2 + \gamma \dot{x}_2 + k/m\, x_2}_{=0 \text{ da } x_2 \in L} = 0 \quad ✓$$

ebenso: $\quad y = \lambda x \in L \quad$ wenn $\quad x \in L$

3b) Schwingungen unter externer Kraft $f(t)$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + k/m \, x = f \qquad : \quad \begin{aligned} f : \; & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto f(t) := f_0 \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

→ Lösungsraum.

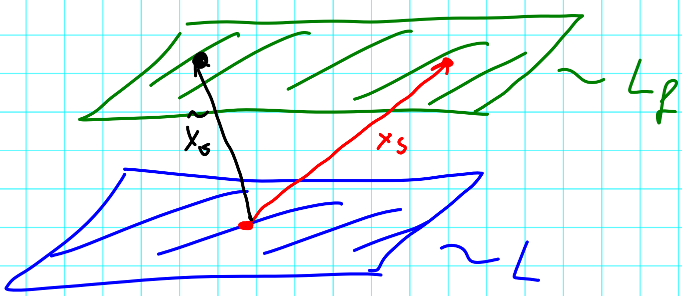
$$L_f = \left\{ \begin{aligned} x : \; & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto x(t) \end{aligned} \;\middle|\; \ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + k/m \, x(t) = f(t) \right\}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$

kein Vektorraum, $\quad x_1 + x_2 \notin L_f \quad$ für $x_1, x_2 \in L_f$

L_f affiner Raum:

$$L_f = \text{"} \underbrace{L}_{\substack{\text{Lösungsraum} \\ \text{mit } f = 0 \\ \text{homogene DGL}}} + \underbrace{x_s}_{\substack{\text{eine spezielle} \\ \text{Lsg der inhomogenen} \\ \text{DGL: } \ddot{x} + \gamma \dot{x} + k/m \, x = f}} \text{"} = \left\{ x + x_s \mid x \in L \right\}$$



Linearkombination, Spann, lineare Unabhängigkeit
Erzeugendensystem (= Vollständigkeit), Basis,
Dimension, Komponentendarstellung

1) Die <u>Linearkombination</u> der Vektoren

$$v_1, v_2, \dots, v_m \in V$$

mit Skalaren

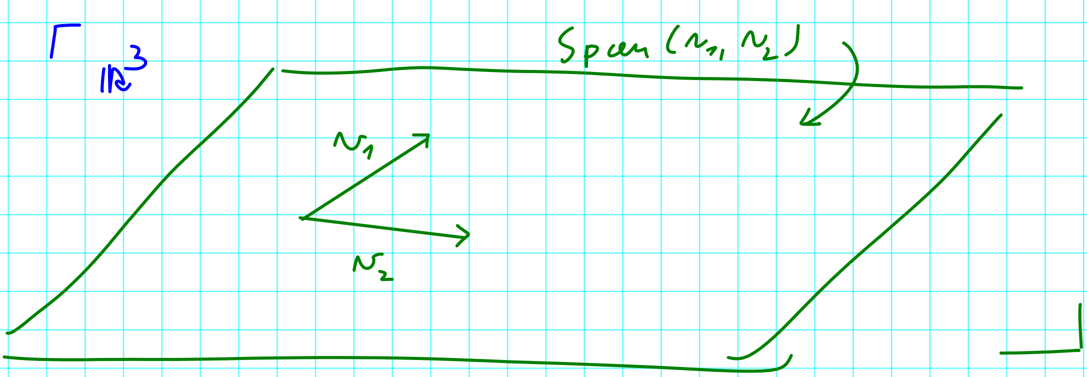
$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}:$$

ist der <u>Vektor</u>

$$u := \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i \quad \in V$$

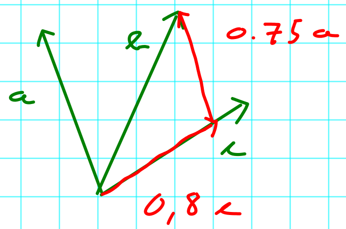
2) Der <u>Spann</u> (= lineare Hülle) der Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ ist die Menge aller Linearkombinationen der Vekt. $v_1, \dots, v_m$ mit bel. Skalaren λ_i:

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$



3) Die Vektoren $v_1, \dots, v_m \in V$ sind <u>linear unabhängig</u> g.d.w. (= "genau dann, wenn") wenn der Nullvektor nur durch die <u>triviale Linearkombination</u> der $v_1, \dots, v_m$ gebildet werden kann: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$.

$\mathbb{R}^2$



$b = 0.8c + 0.75a$

$-0.75a + b - 0.8c = 0$ (*)

a, b : linear unabhängig, da

$$0 \overset{!}{=} \lambda_1 a + \lambda_2 b \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

a, b, c : linear abhängig, da

$v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig

$$:\Leftrightarrow \left\{ \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \right\}$$