

Wdhlg:

Lösungen der Wärmeleitungsgl.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T \quad (3D)$$
$$\hookrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

mittels Fouriertrafo: $T(x, t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{T}(k, t)$

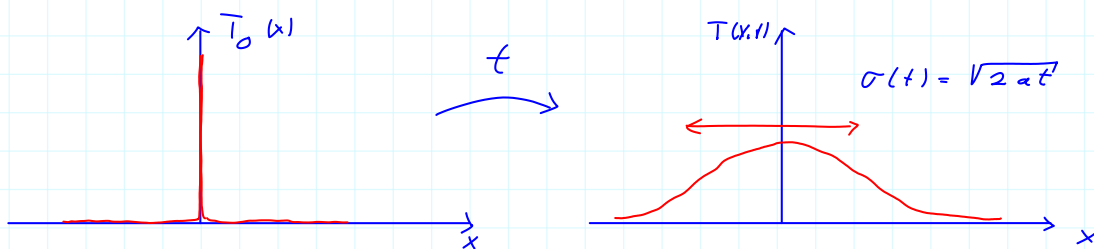
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \longrightarrow -k^2 \hat{T}(k, t)$$

$$\leadsto \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = -a k^2 \hat{T}$$

$$\rightarrow \hat{T}(k, t) = e^{-a k^2 t} \hat{T}_0(k)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{-a k^2 t + i k x} \hat{T}_0(k)$$

$$\text{z.B. } T_0(x) = \delta(x) \leadsto T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\frac{x^2}{4 a t}} =: \Gamma_t(x)$$



alternativ:

$$T(x, 0) = \int dy T_0(y) \delta(x-y)$$

Linearität der WLG:

$\leadsto$

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy T_0(y) \Gamma_t(x-y) = T_0 * \Gamma_t(x)$$

Faltung:

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) g(x-y)$$

Faltungssatz:

$$\widehat{f * g}(k) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)$$

n-dim. Fouriertransformation

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\widehat{f} \mapsto \hat{f}(k) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^4 x}{(2\pi)^{n/2}} f(x) e^{-i \langle k, x \rangle}$$

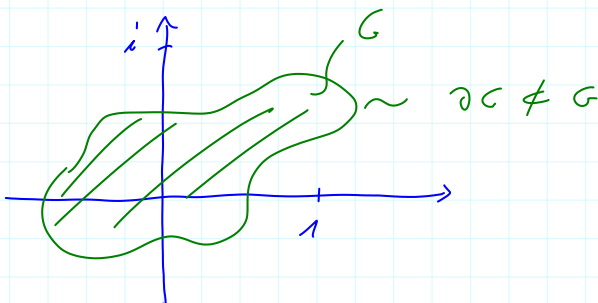
$$\widehat{f}^{-1} \mapsto f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} \hat{f}(k) e^{+i \langle k, x \rangle}$$

Elemente der Funktionentheorie

↳ komplexe Analysis

↳ Gegenstand: komplexe Funktionen $f: G \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto f(z)$

i.d.R. $G \subset \mathbb{C}$: offen, zusammenhängend =: Gebiet



z.B.

$$f(z) = z^2 + 3z \quad : \quad z \in \mathbb{C}$$

$$g(z) = z + \frac{1}{z} \quad : \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

⋮

2) komplexen Ableitung von $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ in $z_0 \in G$:

$$\frac{df(z_0)}{dz} \equiv f'(z_0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{1}{h} (f(z_0 + h) - f(z_0))$$

sofern existiert! $\rightarrow f$ komplex differenzierbar in z_0

"genau wie in $\mathbb{R}$ "

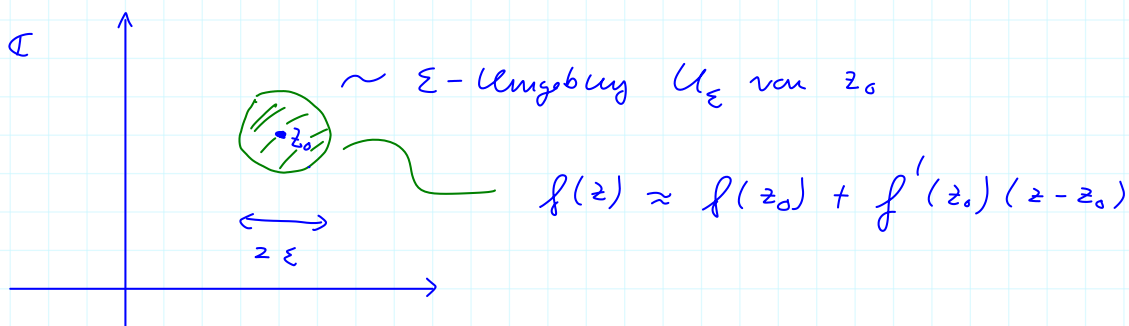
z.B.:

$$f(z) = z^2 + 3z \rightarrow f'(z) = 2z + 3$$

$$g(z) = z + \frac{1}{z} \rightarrow g'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$$

2) lineare Näherung:

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|^2)$$



Vorsicht:

Beispiele: 1) $f(z) = z^2 \rightarrow f'(z) = 2z$

$$\frac{1}{h} ((z_0 + h)^2 - z_0^2) = \frac{1}{h} (z_0^2 + 2z_0h + h^2 - z_0^2)$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(z_0) = 2z_0$$

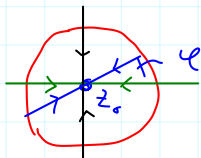


2)

$$f(z) = z^*$$

$$f(x+iy) = (x+iy)^* = x - iy$$

Differenzierbarkeit in z_0 ?



$$h = \epsilon \ll 1$$

$$h = \epsilon \quad \frac{1}{\epsilon} \left((z_0 + \epsilon)^* - z_0^* \right) = \frac{1}{\epsilon} \left(\cancel{z_0}^* + \epsilon - \cancel{z_0}^* \right) = 1 \quad \checkmark$$

$$h = i\epsilon \ll 1 : \quad \frac{1}{i\epsilon} \left((z_0 + i\epsilon)^* - z_0^* \right) = \frac{1}{i\epsilon} \left(\cancel{z_0}^* - i\epsilon - \cancel{z_0}^* \right) = \frac{-i\epsilon}{i\epsilon} = -1 \quad !$$

$$h = e^{i\varphi} \epsilon \ll 1 : \quad \frac{1}{e^{i\varphi} \epsilon} \left((z_0 + e^{i\varphi} \epsilon)^* - z_0^* \right) = e^{-2i\varphi}$$

$\rightarrow f(z) = z^*$ nicht komplex differenzierbar!

Def:

$f: G \rightarrow \mathbb{C}$ komplex diff. bar $\Leftrightarrow$: $f: G \rightarrow \mathbb{C}$
 (d.h. $\forall z \in G$: f diff. bar in z) holomorph
 (analytisch)

Beispiele holomorpher Fkt. en:

$$1) \quad z^n : z \mapsto z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (z^n)' = n z^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$z^{-n} : z \mapsto z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (z^{-n})' = -n z^{-n-1}$$

$$2) \quad p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

$$3) \quad Q(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m$$

Nullstellen $z_1, \dots, z_r$

$$\rightarrow f = \frac{p}{Q} : z \mapsto \frac{p(z)}{Q(z)} : z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_r\}$$

4) Funktion $f(z)$ def. durch Potenzreihe:

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

holomorph auf dem Konvergenzbereich

$$\leadsto \exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$\rightarrow (e^z)' = e^z$$

$$\sin(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} (-1)^l z^{2l+1}$$

$$\leadsto \sin(z)' = \cos(z)$$

$$\cos(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} (-1)^l z^{2l}$$

$$\leadsto \cos(z) = -\sin(z)$$

Beispiele nicht-holomorpher Funktionen:

gerade: Funktionen, die nur durch z^* gebildet werden können:

$$z^*, \quad |z|^2 = z z^*, \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2} (z + z^*)$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} (z - z^*), \dots$$

Was genau sind holomorphe Funktionen?

$$x+iy = z \mapsto z \quad \text{holomorph} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$z \mapsto z^*$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

nicht
holomorph



Komplexe vs. reelle Differenzierbarkeit

Cauchy - Riemann - DGLen

$$\begin{aligned} f: G &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned}$$

1D komplex

$$\begin{aligned} z = x+iy &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \longleftrightarrow \\ f = u+iv &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}: G &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2D reell

Erinnerung (3!)

$$\tilde{f}: G \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{reell diffbar in } p_0 \in G$$

: $\Leftrightarrow$ es existiert lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
derart, dass

$$\lim_{\mathbb{R}^2 \ni h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|h|} \left(f(p+h) - f(p) \right) - Ah \right| = 0$$

$$\text{End}(\mathbb{R}^2) \ni A =: d\tilde{f}_p \quad \leadsto \quad Ah = d\tilde{f}_p(h)$$

$$\leadsto \text{lineare Näherung: } \tilde{f}(p+h) = \tilde{f}(p) + d\tilde{f}_p(h) + o(|h|^2)$$

$$\tilde{f}(p + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \tilde{f}(p) + d\tilde{f}_p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

✓

entscheidende Beobachtung:

Lemma

$f: G \rightarrow \mathbb{C}$ komplex diff'bar in $z_0 = (x + iy) \in G$

$\Leftrightarrow \tilde{f}: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ reell diff'bar in $p_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
und !!! ist

*

$$d\tilde{f}_p = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$



$$d\tilde{f}_p = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} u = \operatorname{Re} f \\ v = \operatorname{Im} f \end{matrix}$$

Satz:

f komplex diff'bar in z_0

genau f reell diff'bar in z_0 und zudem
die Cauchy-Riemann-DGLen für $u = \operatorname{Re} f$
und $v = \operatorname{Im} f$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

erfüllt sind.

⇒ geometrische Bedeutung holomorpher Funktionen:

f holomorph!

für geeign. $a, b \in \mathbb{R}$

Subst
→

$$df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Lemma

$$= \lambda \begin{pmatrix} a/\lambda & -b/\lambda \\ b/\lambda & a/\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad R_\alpha$$

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$$

↑
normiert, !
orthogonal.

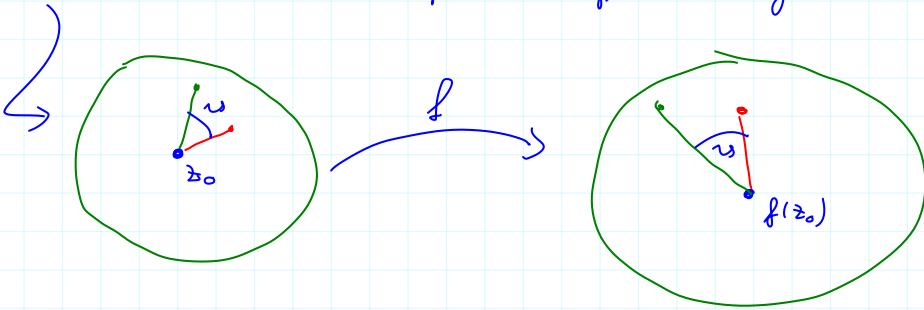
$$\tan \alpha = \frac{b}{a} \quad !$$

d.h.

$$df(z_0) = \lambda R_\alpha$$

Rotation

isotrope Dehnung / Streckung



holomorphe Funktionen

= "Winkel treue" Funktionen!

