

letzte Vorlsg.:

• Vektorraum = Menge V mit

(i) Vektoraddition $V \times V \rightarrow V$
 $u, v \mapsto u + v$

$$(A1) \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$(A2) \quad \exists \text{ Nullvektor } 0: \quad u + 0 = u$$

$$(A3) \quad \exists \text{ Inversen } -u \approx u: \quad u + (-u) = 0$$

$$(A4) \quad u + v = v + u$$

(ii) Skalarmultiplikation $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$
 $\lambda, v \mapsto \lambda v$

$$(S1) \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

$$(S2) \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

$$(S3) \quad \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$$

$$(S4) \quad 1v = v$$

• Linearkombination:

$$\left. \begin{array}{l} v_1, v_2, \dots, v_n \in V \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \in V$$
$$\left(= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right)$$

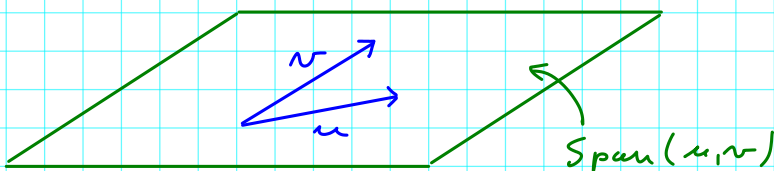
• Spann (= lineare Hüll(e)):

$$\text{Spann}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Menge aller

L.K. der

Vekt. $v_1, \dots, v_n$

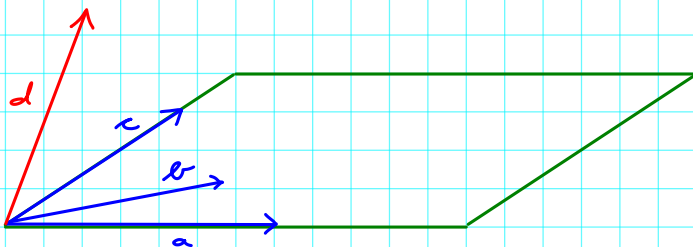


• Lineare Unabhängigkeit:

$v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig

: $\Leftrightarrow$ nur die triviale ^{*} L.k. der $v_1, \dots, v_n$ ergibt den Nullvektor 0

$$(*) \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \underline{\underline{0}}$$



$\Rightarrow$ a, b lin. unabhängig

a, b, c lin. abhängig

a, b, d lin. unabhängig

a, b, c, d lin. abhängig

Erzeugendensystem / Vollständigkeit

$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ bilden ein Erzeugendensystem (sind vollständig) g.d.w. jeder Vektor $u \in V$ als Linearkombination dargestellt werden kann:

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Basis

Ein linear unabhängiges und zugleich vollständiges System von Vektoren $b_1, b_2, \dots, b_n \in V$ bildet eine Basis von V .

Satz

Jede Basis eines Vektorraums hat dieselbe Anzahl von Vektoren.

(cf. G. Fischer)

↳ Dimension eines Vektorraums V :

$\dim V :=$ Anzahl Vektoren einer Basis

Komponentendarstellung eines Vektors bzgl. Basis

$B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ sei Basis des VRs V

→ eindeutige Darstellung eines Vekt. $u \in V$.

$$u = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n = \sum_{i=1}^n \mu_i b_i =: \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_B \in V$$

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sind die Komponenten von u bzgl. B

↳ Komponentenvektor von u bzgl. B :

$${}_B u := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Γ*) Eindeutigkeit?

$$\sum_i \tilde{\mu}_i b_i = u = \sum_i \mu_i b_i \quad \text{z.z.: } \tilde{\mu}_i = \mu_i \text{ für } i=1, \dots, n!$$

↳ $0 = \sum_i \tilde{\mu}_i b_i - \sum_i \mu_i b_i = \sum_i (\tilde{\mu}_i - \mu_i) b_i = 0!$ da $b_1, \dots, b_n$ linear unabhängig:
 $\Rightarrow \tilde{\mu}_i = \mu_i$ für alle $i=1, \dots, n$

$$\rightarrow {}_B(u+v) = {}_B u + {}_B v$$

$\uparrow$ Vektoraddition in V $\uparrow$ Vektoraddition in $\mathbb{K}^n$

$${}_B(\lambda u) = \lambda {}_B u$$

$\uparrow$ Skalarmultipl. in V $\uparrow$ Skalarmultipl. in $\mathbb{K}^n$

d.h.

$$V \cong \mathbb{K}^n$$

- V $\mathbb{K}$ -VR

- $\dim V = n$

Beispiele:

1) $\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{K} \right\}$ mit Standardbasis

$$E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

mit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

konkret: $n=2, \mathbb{K}=\mathbb{R}, a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, E = (e_1, e_2)$

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} - 1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2} = \underline{2} e_1 - \underline{1} e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_E$$

betrachte andere Basis $B = (b_1, b_2), b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Komponenten von $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzgl. Basis B ?

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} -\frac{3}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{b_1} + 5 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2} = -\frac{3}{2} b_1 + 5 b_2 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 5 \end{pmatrix}_B$$

$$\begin{pmatrix} -3/2 \\ 5 \end{pmatrix}_B = a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_E \rightarrow {}_B a = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

2. Beispiel: Polynome max. 2. Grades:

$$P_2 = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \underline{a_0} + \underline{a_1}x + \underline{a_2}x^2 : a_i \in \mathbb{R} \}$$

besitzt Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ mit

Basisvektoren (= Funktionen!) $\hookrightarrow b_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto b_i(x)$

$$\text{mit } \underline{b_1(x) = 1}, \quad b_2(x) = \underline{x}, \quad b_3(x) = \underline{x^2}$$

betrachte etwa $f, g \in P_2$ (d.h. f, g Funktionen!)

$$f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = x^2 - 5$$

Komponenten von f, g bzgl. B :

$$f(x) = \underset{b_1(x)}{3 \cdot 1} + \underset{b_2(x)}{2 \cdot x} + \underset{b_3(x)}{0 \cdot x^2} = 3b_1(x) + 2b_2(x) + 0b_3(x)$$

$$\text{d.h. } f = \underline{3b_1} + \underline{2b_2} + \underline{0b_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_B \in P_2 \quad \Gamma \text{ d.h. } {}_B f = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \underline{\mathbb{R}^3}$$

$$g(x) = -5b_1(x) + 0b_2(x) + 1b_3(x);$$

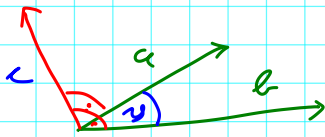
$$\text{d.h. } g = \underline{-5b_1} + \underline{0b_2} + \underline{1b_3} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \in P_2 \quad \Gamma \text{ d.h. } {}_B g = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \underline{\mathbb{R}^3}$$

$$f+g = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 2+0 \\ 0+1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

$$(f+g)(x) = -2b_1(x) + 2b_2(x) + 1b_3(x) = -2 + 2x + x^2$$

neues Thema: Vektorräume mit "Geometrie":

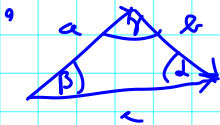
Translationen:



- Winkel $\angle(a, b) =: \alpha$
- Länge $|a|, |b|$
- Orthogonalität: $a \perp c, b \perp c$

Gesetze der Geometrie:

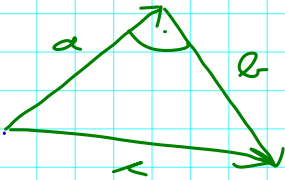
- $a \perp c, b \perp c \rightarrow a + b \perp c$



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

- S. d. Pythagoras:

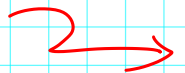
$$|c|^2 = |a|^2 + |b|^2$$



hier: "Geometrie" für einen VR mittels

Skalarprodukt $\rightarrow$ Grundbegriffe

$\rightarrow$ eukl. Geometrie!



Def.: Ein Skalarprodukt eines reellen VRs V ist eine Abb. : $\langle \dots, \dots \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
 $u, v \mapsto \langle u, v \rangle$

mit Eigenschaften

$$(i) \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(ii) \quad \langle u, u \rangle \geq 0 \quad u \neq 0 \quad (\text{Positivität})$$

$$(iii) \quad \langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad (\text{Linearität})$$

Bemerkungen:

1) es gibt viele Skalarprodukte!

2) Linearität gilt auch im 1. Faktor:

$$\langle \lambda u, v \rangle \stackrel{(i)}{=} \langle v, \lambda u \rangle \stackrel{(ii)}{=} \lambda \langle v, u \rangle \stackrel{(iii)}{=} \lambda \langle u, v \rangle$$

$$\langle u+w, v \rangle = \dots = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$$

3) Notation:

$$\langle u, v \rangle \equiv u \cdot v \equiv uv = (:u, v :) = \dots$$

4) reellen VR mit Skalarprodukt $\equiv$ euklidischen Vektorraum

Grundbegriffe / Annahmen / Beispiele

$\hookrightarrow V, u, v, \lambda \in \mathbb{R}$

1) Orthogonalität

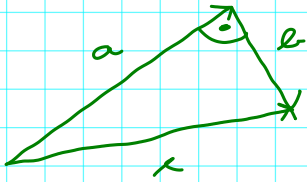
$$u \perp v \iff \langle u, v \rangle = 0$$

2) Norm (= Länge, Betrag)

$$|u| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

2 → 3) S. d. Pythagoras: $|x|^2 = |a|^2 + |b|^2$

$$a \perp b$$



Beweis: $a \perp b \rightarrow \langle a, b \rangle \stackrel{\text{Def.}}{=} 0$

$$\text{ii) } x = a + b, \quad |x|^2 = \langle x, x \rangle$$

Def

$$= \langle a+b, a+b \rangle$$

iii:

$$= \underbrace{\langle a, a \rangle}_{\substack{\text{Def} \\ |a|^2}} + \underbrace{\langle \cancel{a}, b \rangle}_{\substack{\text{if } a \perp b \\ 0}} + \underbrace{\langle b, \cancel{a} \rangle}_{\substack{\text{if } \\ 0}} + \underbrace{\langle b, b \rangle}_{|b|^2}$$

$$\text{d.h. } |x|^2 = |a|^2 + |b|^2 \quad \checkmark$$