

Wdhlg.:

reeller VR

Skalarprodukt = Abb. $\langle \dots, \dots \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$u, v \mapsto \langle u, v \rangle$$

mit Eigenschaften

- (i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (Symmetrie)
- (ii) $\langle u, u \rangle > 0$ für $u \neq 0$ (Positivität)
- (iii) $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
 $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ (Linearität)

euklidischer VR = reeller VR mit Skalarprodukt

Orthogonalität:

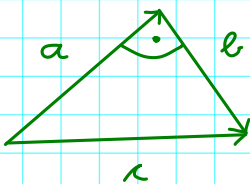
$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

Norm (= Länge, Betrag)

$$|v| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

2. euklidische Geometrie!

z.B. Satz des Pythagoras: $|c|^2 = |a|^2 + |b|^2$



┌

$$\begin{cases} a \perp b \rightarrow \langle a, b \rangle = 0 \\ c = a + b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |c|^2 &= \langle a+b, a+b \rangle \\ &= \langle a, a \rangle + \underbrace{\langle a, b \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle b, a \rangle}_{=0} + \langle b, b \rangle \\ &= |a|^2 + |b|^2 \end{aligned}$$

└

- Richtungsvektor $\hat{u}$ von Vektor u



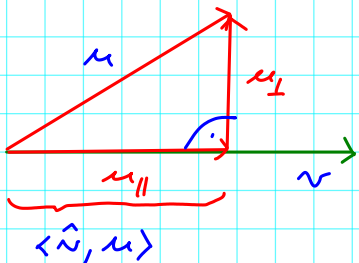
$$\hat{u} := \frac{1}{|u|} u$$

$$\rightarrow |\hat{u}| = 1$$

$$u = |u| \hat{u}$$

- Parallel- und Orthogonalkomponente

$$u = u_{\parallel} + u_{\perp}$$



Beh:

$$u_{\parallel} = \langle \hat{v}, u \rangle \hat{v}$$

$$\hookrightarrow u_{\perp} = u - u_{\parallel}$$

$$\uparrow \text{ z.B.: } u_{\perp} \perp \hat{v} ! \quad \text{d.h. z.B. } \langle u_{\perp}, \hat{v} \rangle = 0$$

$$\langle u_{\perp}, \hat{v} \rangle = \langle u - u_{\parallel}, \hat{v} \rangle$$

$$= \langle u - \underbrace{\langle \hat{v}, u \rangle \hat{v}}_{= u_{\parallel}}, \hat{v} \rangle$$

$$= \langle u, \hat{v} \rangle - \underbrace{\langle \hat{v}, u \rangle \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle}_{= 1} = 0 !$$

2. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| |v|$$

Pyth.

$$\uparrow \quad |u|^2 = |u_{\parallel} + u_{\perp}|^2 = |u_{\parallel}|^2 + |u_{\perp}|^2$$

$$\geq |u_{\parallel}|^2 = |\langle \hat{v}, u \rangle|^2$$

$$\hookrightarrow |u| \geq |\langle \hat{v}, u \rangle| \xrightarrow{= |v|} |u| |v| \geq |\langle v, u \rangle|$$

2) Dreiecksungleichungen

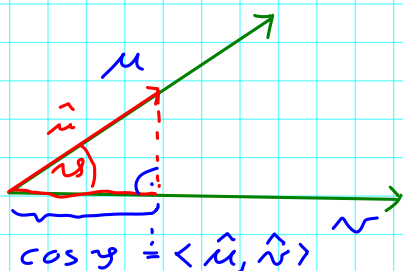


$$| |u| - |v| | \leq |u+v| \leq |u| + |v|$$

┐ folgt aus Cauchy-Schwarzscher Ungl. $\rightarrow$ Übungsaufg. ┐

Winkeldefinition

$$\angle(u, v) \equiv \vartheta$$



$$\cos \vartheta := \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}$$

$$\langle u, v \rangle = |u||v| \cos \vartheta$$

Beispiele:

1) Standard skalarprodukt für $\mathbb{R}^n$:

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

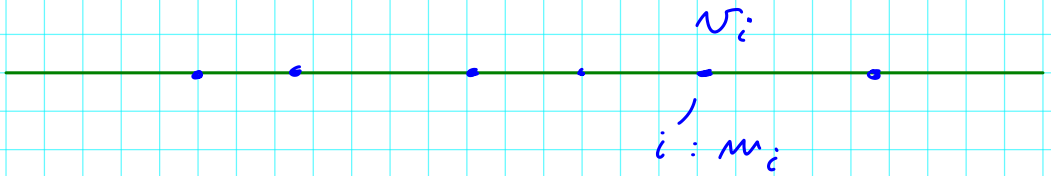
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

symmetrisch ✓

positiv ✓

linear ✓ ┐

2) Mechanik: N Massenpunkte in 1



→ kinet. Energie: $E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$

betrachte "boost": $v_i \rightarrow v_i' = v_i + \underline{u}$

→ $E \rightarrow \underbrace{E'} \stackrel{?}{\longleftrightarrow} E$

zeige: $(\sqrt{E'} - \sqrt{E})^2 \leq \frac{1}{2} M u^2$?

$M = \sum_i m_i$

↳ Idee: def. Skalarprodukt für $\mathbb{R}^N$

$\left(\begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{matrix} \right)$ $\langle v, w \rangle_E := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i w_i$

SP? ✓

$\left| M_E^2 \right| \left[\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle_E = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = E \right] !$

3) $V = V\mathbb{R}$ der stetigen Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

↳ $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx$ Γ

Skalarprodukt!

(Symmetrie, Positivität
Linearität)

Skalarprodukte für komplexe VR:

Hermitesches Skalarprodukt für einen komplexen VR V

$$= \text{Abb. : } \langle \dots, \dots \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$u, v \mapsto \langle u, v \rangle$$

mit Eigenschaften:

$$(i) \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(ii) \quad \langle u, u \rangle \geq 0 \quad (u \neq 0) \quad (\text{Positivität})$$

$\uparrow$
 $\mathbb{R}!$

$$(iii) \quad \langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad (\text{Linearität})$$

!: $\langle \lambda u, v \rangle \stackrel{(i)}{=} \overline{\langle v, \lambda u \rangle} \stackrel{(iii)}{=} \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$

$$\lambda^* = \overline{\lambda}$$

$$(x+iy)^* = x-iy$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda^* \langle u, v \rangle$$

• unitärer VR := kompl. VR mit herm. S.P.

2> Orthogonalität:

$$u \perp v \iff \langle u, v \rangle = 0$$

2> Norm: $|u| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$

2> Parallelkomp.: $u_{||} = \langle \hat{u}, u \rangle \hat{u}$

2) Cauchy - Schwarz'sche Ugl.:

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| |v|$$

2) Dreiecksungleichen:

$$||v| - |u|| \leq |v+u| \leq |v| + |u|$$

Beispiele:

1) Standards.p. für $\mathbb{C}^n$:

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^n a_i^* b_i$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$



2) $V =$ VR der komplexwert. stet. Fktn $f: [a, b] \rightarrow \underline{\underline{\mathbb{C}}}$

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)^* g(x) dx$$

Orthonormalbasen für reell./hermitäre VRe

Ein Orthonormalbasis (ONB) $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

ist eine Basis mit paarweise orthogonalen
und normierten Basisvektoren, z.B.

$$\begin{cases} \text{i)} & e_i \perp e_j & : i \neq j \\ \text{ii)} & |e_i| = 1 & : i, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \langle e_i, e_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i=j \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} !$$