

Wdhlg.:

hermitesches Skalarprodukt für

komplexen VR $V = \text{Abb. } \langle \dots, \dots \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$
 $u, v \mapsto \langle u, v \rangle$

mit Eigenschaften

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*$ (Symmetrie)

(ii) $\langle u, u \rangle > 0 \quad (u \neq 0)$ (Positivität)

(iii) $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ (Linearität)

$\hookrightarrow \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle^*$

• kompl. VR mit herm. S.P. =: unitärer VR

$\hookrightarrow$ Orthogonalität: $u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$

$\hookrightarrow$ Norm: $|u| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$
[Notation: $|u| \equiv \|u\|$]

$\hookrightarrow$ Cauchy-Schwarzsche Ugl.: $\langle u, v \rangle \leq |u| |v|$

$\hookrightarrow$ Δ -Uglen: $||u| - |v|| \leq |u+v| \leq |u| + |v|$

Bsp. 1) $\mathbb{C}^n$ mit herm. Standardskalarprodukt

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^n a_i^* b_i$$

Bsp. 2) stetige, komplexwertige Fkt.en $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$:

herm. Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)^* g(x) dx$$

Orthonormalbasen eukl./unitärer VR

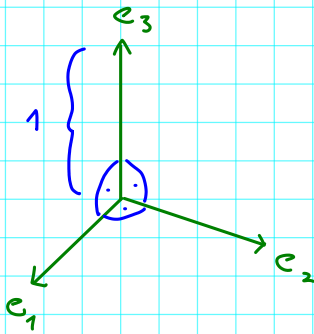
Basis $B = (e_1, \dots, e_n)$ Orthonormalbasis (ONB) g.d.w.

Basisvektoren paarweise orthogonal und normiert

d.h.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

geometrisch:



Bsp.: $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt $\langle a, b \rangle = \sum_i a_i \cdot b_i$

→ Standardbasis $E = (e_1, \dots, e_n)$ ist ONB

ONB praktisch da

1)

$$u_i = \langle e_i, u \rangle$$

↑ Komponenten von u, v bzgl. ONB B

2)

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i$$

(vgl. Üb. 6.9.)

Existenz?

jede Basis eines eukl./unit. VRs kann zu einer ONB orthonormalisiert werden →

Schmidt- Gramsche Orthonormalisierung:

bel. Basis $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$$e_1 := b_1 / |b_1|$$

$$b_2^{(2)} := b_2 - \langle e_1, b_2 \rangle e_1$$

$$b_3^{(2)} := b_3 - \langle e_1, b_3 \rangle e_1$$

$$b_n^{(2)} := b_n - \langle e_1, b_n \rangle e_1$$

$$e_2 := b_2^{(2)} / |b_2^{(2)}|$$

$$b_3^{(3)} := b_3^{(2)} - \langle e_2, b_3^{(2)} \rangle e_2$$

$$b_4^{(3)} := b_4^{(2)} - \langle e_2, b_4^{(2)} \rangle e_2$$

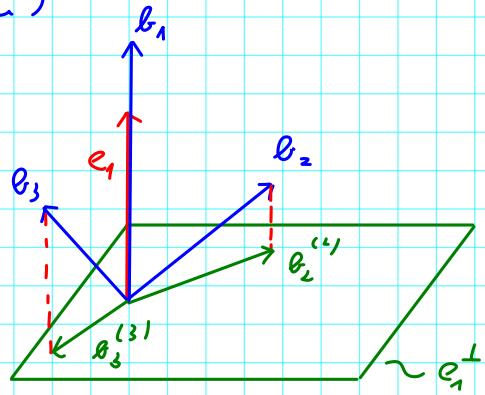
$$\vdots$$

$$e_n^{(3)} := e_n^{(2)} - \langle e_2, e_n^{(2)} \rangle e_2$$

$$e_3 := b_3^{(3)} / |b_3^{(2)}|$$

$$e_n := b_n^{(n)} / |b_n^{(n)}|$$

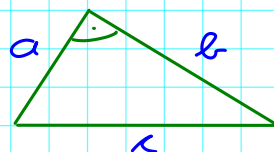
2, $B' = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ONB !



Nachtrag:

Satz des Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Beweise ?!

3
2 → mehr als 360 ! (Wikipedia)

Was ist ein mathematischer Beweis eines Satzes ?

Ableitung des Satzes aus Axiomen !
(und daraus abgeleiteten Sätzen)

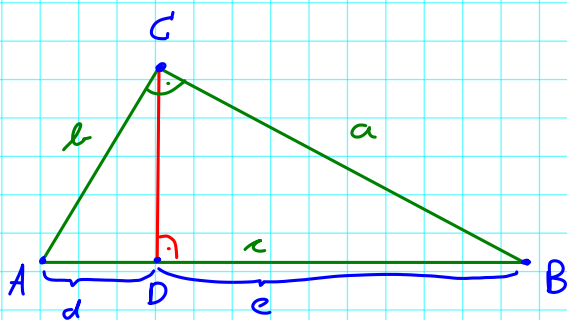
2 → Satz gültig, wenn Axiome gültig!



Ein math. Beweis behauptet nichts
über Gültigkeit, Plausibilität, Relevanz, etc.
der Axiome !

Beispiel: Beweis des S.v. Pythagoras (ungefähr) nach

Euklid (Alexandria, 3 Jdt. v. Chr.):



$\triangle(ABC)$

ähnlich $\triangle(ADC)$

ähnlich $\triangle(BDC)$

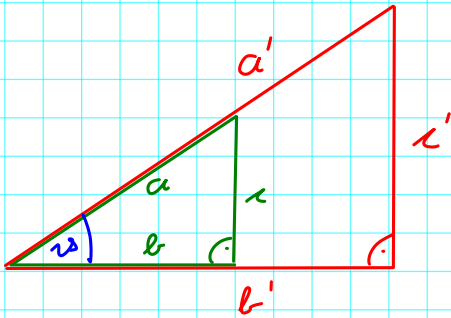
$$\rightarrow \frac{c}{b} = \frac{b}{d} \quad \text{und} \quad \frac{c}{a} = \frac{a}{e}$$

$$\rightarrow d \cdot c = b^2, \quad e \cdot c = a^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = b^2 + a^2$$

□

Voraussetzungen u.ä.:

(i) Ähnlichkeit von Dreiecken bei Übereinstimmung von zwei Winkeln:

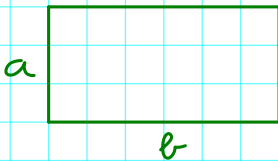


$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$$

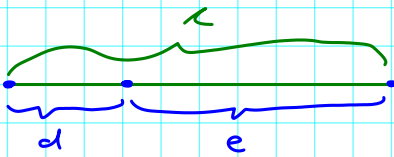
$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

(ii) Flächeninhalt eines Rechtecks:



$$A = a \cdot b$$

(iii) Additivität von Strecken:



$$c = d + e$$

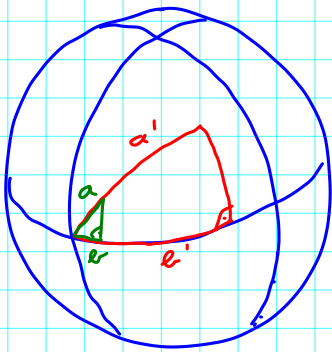
⋮

mathematisch strikte Axiomatisierung

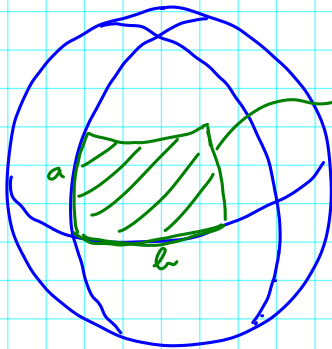
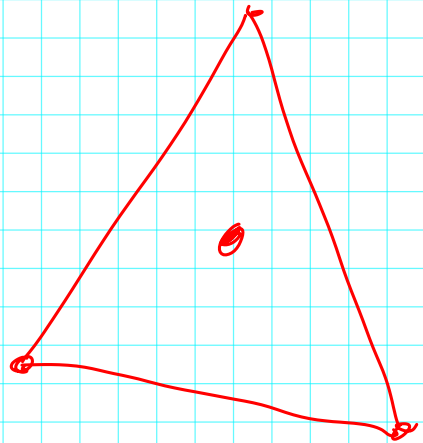
der "euklidischen Geometrie" erstmals

1899 durch D. Hilbert: 21 Axiome!

(i), (ii) etwa ungültig auf Kugeloberfläche:

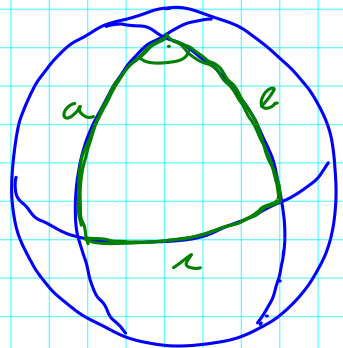


$$\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$$



$$A \neq ab$$

$$c^2 \neq a^2 + b^2 !$$



Ist "Beweis mit Skalarprodukt" ein Beweis?

- Hilberts 21 Axiome
-

geometr.
motiviert!

Euklid.
Beweis

S.d.P.

- Vektorraum
- Skalarprodukt
- Orthogonalität
- Norm

geometr.
motiviert?

$$|a+b|^2 = \langle a+b, a+b \rangle = |a|^2 + |b|^2$$

Geometrie



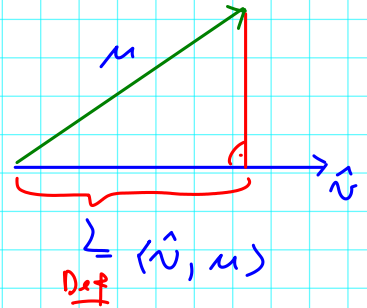
Vektorraum



(räumliche Translationen!)

Skalarprodukt?

als "Länge der Projektion":

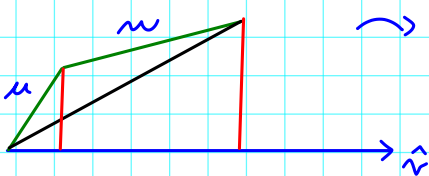
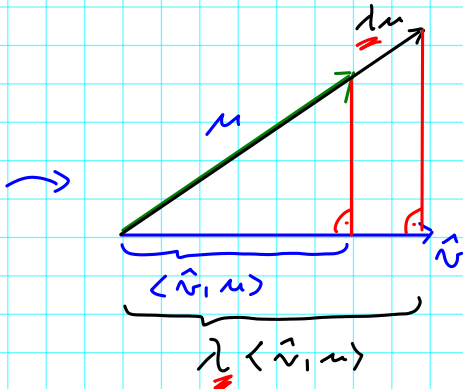


a.h. $\langle \hat{n}, \lambda u \rangle = \lambda \langle \hat{n}, u \rangle$

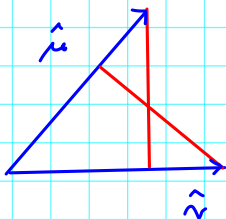
$|u|^2 = \sum u_i^2$

$\hookrightarrow \langle u, u \rangle := \sum u_i \cdot u_i$

$\hookrightarrow |u|^2 =$

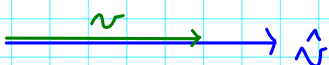


$\hookrightarrow \langle \hat{n}, u \rangle + \langle \hat{n}, w \rangle = \langle \hat{n}, u + w \rangle$



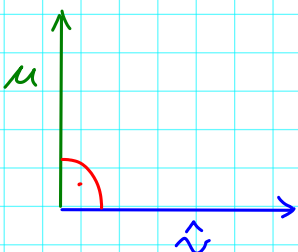
$\hookrightarrow \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle = \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle$

$\hookrightarrow$ Linearität



$\hookrightarrow |v| = |\langle \hat{n}, v \rangle| \sim |v|^2 = \langle v, v \rangle$

$\hookrightarrow$ Norm



$\hookrightarrow \langle \hat{n}, u \rangle = 0$

$\hookrightarrow$ Orthog.

nächstes Thema: Lineare Abbildungen

vorab: Untervektorraum (UVR), Summe von UVRs,
Dimensionsformel

Def.: Eine nichtleere Teilmenge U eines VRs V ist ein Untervektorraum (UVR) wenn sie unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist: d.h.:

$$u, v \in U, \lambda \in \mathbb{K} : u+v, \lambda u \in \underline{U}$$

Bemerkungen

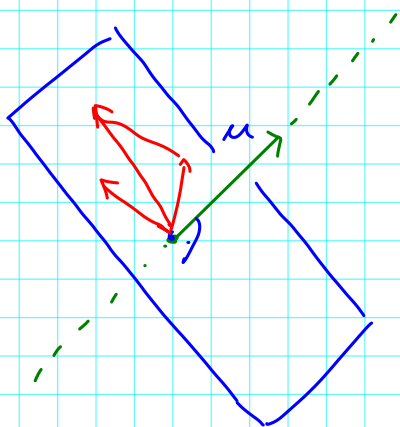
1) UVR $U \subset V$ mit Addition und S. M. wie in V ist Vektorraum! ✓

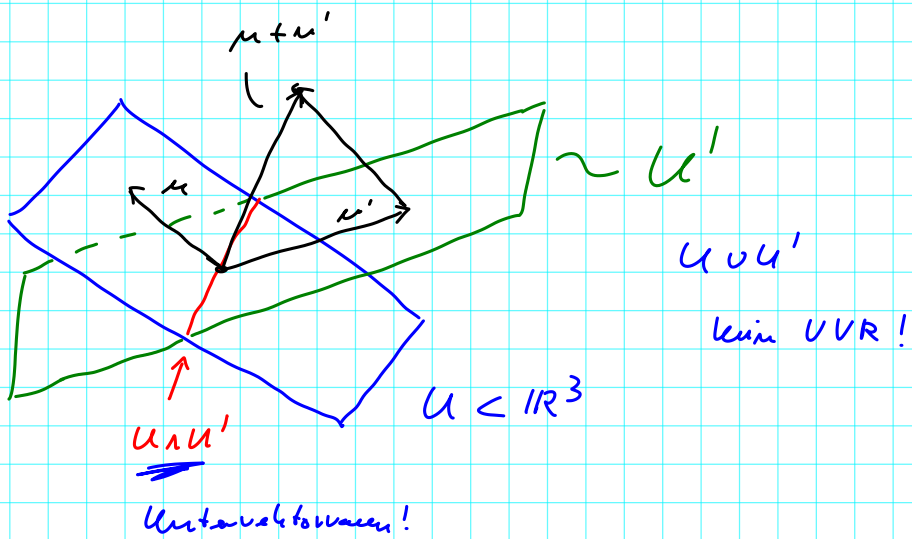
2) U, U' seien UVRs von V
 $\Rightarrow \underline{U \cap U'}$ ebenfalls UVR von V ✓

⚠ $U \cup U'$ i.d.R. kein UVR!

→ Bsp.: $V = \mathbb{R}^3$ mit Skalar. S. $\langle \dots, \dots \rangle$, $u \in \mathbb{R}^3$

$$\text{UVR } U := \{ \langle u, v \rangle = 0 \mid v \in \mathbb{R}^3 \} = u^\perp$$





Def.: Die Summe zweier UVRs $U, U' \subset V$ ist der UVR:

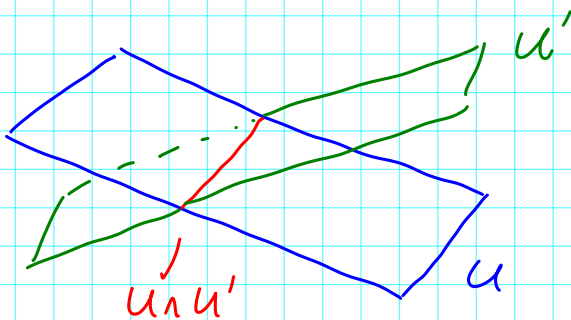
$$\begin{aligned}
 U + U' &:= \text{Span}\{U \cup U'\} \\
 &= \{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}
 \end{aligned}$$

Satz: UVRs $U, U' \subset V$

$$\dim(U + U') = \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U')$$

(Dimensionsformel)

$$V = \mathbb{R}^3$$



$$U + U' = V \cong \mathbb{R}^3$$

$$\dim(U + U') = 3 \stackrel{?}{=} \underbrace{\dim U}_2 + \underbrace{\dim U'}_2 - \underbrace{\dim(U \cap U')}_1$$

Beweis der Dimensionsformel (Idee)

$$B_{U \cap U'} = (b_1, \dots, b_k) \quad \text{Basis von } U \cap U' \\ k = \dim(U \cap U')$$

$$\rightarrow B_U = (\underbrace{b_1, \dots, b_k}_{\text{Basis von } U \cap U'}, \underbrace{u_1, \dots, u_{L-k}}_{\text{Basis von } U \setminus (U \cap U')}) \quad \text{Basis von } U \\ L = \dim U$$

$$\rightarrow B_{U'} = (\underbrace{b_1, \dots, b_k}_{\text{Basis von } U \cap U'}, \underbrace{u'_1, \dots, u'_{M-k}}_{\text{Basis von } U' \setminus (U \cap U')}) \quad \text{Basis von } U' \\ M = \dim U'$$

$$\rightarrow B_{U+U'} = (b_1, \dots, b_k, \underbrace{u_1, \dots, u_{L-k}}_{\text{Basis von } U \setminus (U \cap U')}, \underbrace{u'_1, \dots, u'_{M-k}}_{\text{Basis von } U' \setminus (U \cap U')})$$

Basis von $U+U'$! (vollständig ✓, lin. unabhängig)

(G. Fischer L. 4
Jänich L. 1.)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dim(U+U') &= \cancel{L} + L - \cancel{k} + M - k \\ &= L + M - k \\ &= \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U') \quad \square \end{aligned}$$

Lineare Abbildungen

Def. Eine Abb. A eines K -VRs V in einen K -VR W ist linear (ist ein Homomorphismus) wenn sie mit Addition und Skalarmultiplikation verträglich ist,

d.h.:

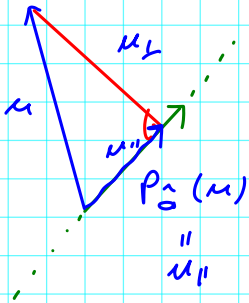
$$A(u+v) = A(u) + A(v)$$

$$A(\lambda u) = \lambda A(u)$$

Bsp 1): $V = W = \mathbb{R}^n$, $\hat{a} \in \mathbb{R}^n$, $|\hat{a}| = 1$

"Projektion auf $\hat{a}$ ": $P_{\hat{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$u \mapsto \langle \hat{a}, u \rangle \hat{a}$$



Γ linear, $u u$

$$\begin{aligned} P_{\hat{a}}(u+v) &= \langle \hat{a}, u+v \rangle \hat{a} \\ &= \underbrace{\langle \hat{a}, u \rangle}_{P_{\hat{a}}(u)} \hat{a} + \underbrace{\langle \hat{a}, v \rangle}_{P_{\hat{a}}(v)} \hat{a} \\ &= P_{\hat{a}}(u) + P_{\hat{a}}(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\hat{a}}(\lambda u) &= \langle \hat{a}, \lambda u \rangle \hat{a} \\ &= \lambda \underbrace{\langle \hat{a}, u \rangle}_{P_{\hat{a}}(u)} \hat{a} \\ &= \lambda P_{\hat{a}}(u) \end{aligned}$$

