Wdhlg.:

$U \neq \emptyset$

Untervektorraum (UVR) = **abgeschlossene Teilmenge** U eines VRs V

d.h. $\left.\begin{array}{r} u, v \in U \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u+v \in U \\ \lambda u \in U, \end{array}$

- UVR Vektorraum
- $\{0_V\}$: **kleinster** UVR von V, $\dim\{0_V\} \overset{\text{Def.}}{=} 0$
- V : **größter** UVR von V
- $U \cap U'$: **größter** UVR, der in U und zugleich U' enthalten ist
- $U + U' := \mathrm{Span}\{U \cup U'\}$: **kleinster** UVR, der U und U' enthält

  Summe von U und U'

Dimensionformel:

$$\boxed{\dim(U+U') = \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U')}$$

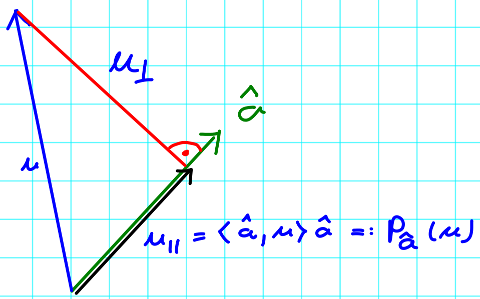
Lineare Abbildung (Homomorphismus)

= Abbildung zwischen **Vektorräumen**, die mit Addition und Skalarmultiplikation **verträglich** ist:

$$\boxed{\begin{array}{c} A: V \to W \\ \text{mit} \quad A(u+v) = A(u) + A(v) \\ A(\lambda u) = \lambda A(u) \end{array}}$$

Bsp 1)

$$P_{\hat{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$u \mapsto \langle \hat{a}, u \rangle \hat{a}$$



linear!

Bsp: $V = W = P_l$: ganz. rat. Fkt.en max. l-ten Grades

$$= \{ f(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_l x^l \mid a_i \in \mathbb{R} \}$$

Abb: $\frac{d}{dx} : P_l \to P_l$

$$f \mapsto \frac{d}{dx} f := f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

$\frac{d}{dx}$ lineare Abb.:

$$\frac{d}{dx}(f+g) = (f+g)' = f' + g'$$
$$= \frac{d}{dx} f + \frac{d}{dx} g$$

$$\frac{d}{dx}(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda \frac{d}{dx}$$ ✓

<u>Vokabeln</u>:

- Menge aller linearen Abb.en $U \to W$
  $\equiv \mathrm{Hom}(U, W)$
  bildet mit Add. $(A+B)(u) := A(u) + B(u)$
  $(\lambda A)(u) := \lambda A(u)$
  einen <u>Vektorraum</u>

- lin. Abb. $A: V \to V$ $=:$ Endomorphismus

- bijektive lin Abb $V \to W$ $=:$ Isomorphismus

- V isomorph W $:\Leftrightarrow$ es ex. Isomorphismus
  $V \cong W$ $\qquad\qquad$ $V \to W$
  "V im wesentlichen gleich W"

- bijektiver Endomorphismus $=:$ Automorphismus
  $\hookrightarrow$ bij. lin. Abb: $V \to V$

Bemerkungen: $\quad A: V \to W$ linear:

- $A(0_V) = 0_W$ $\qquad$ $\ulcorner$ $A(0_V) = A(0\,0_V)$
  $= 0\,A(0_V) = 0_W$ $\lrcorner$

- $A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A(v_i)$

- $v_1, v_2, \dots, v_m$ linear abhängig
  $\Rightarrow$ $A(v_1), A(v_2), \dots, A(v_m)$ linear abhängig

$\ulcorner$ $0_V = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i$ mit $\mu_\ell \neq 0$

$\hookrightarrow$ $0_W = A(0_V) = A\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i A(v_i)$

✓ $\lrcorner$

- $A(v_1), A(v_2), \dots, A(v_m)$ linear unabhängig
  $\Rightarrow$ $v_1, v_2, \dots, v_m$ linear unabhängig

✓

$\ulcorner$

$$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

$\lrcorner$

Def. Bild, Kern und Rang

einer lin. Abb. $A: V \to W$

- $\operatorname{Im} A := \{ A(v) \mid v \in V \} =: A(V)$: Bild von A
- $\operatorname{Ker} A := \{ v \in V \mid A(v) = 0_W \} = A^{-1}(0_W)$: Kern von A
- $\operatorname{Rg} A := \dim \operatorname{Im} A$: Rang von A

a) $\operatorname{Im} A$ und $\operatorname{Ker} A$ sind UVRe von W bzw. V !

$\ulcorner$

Abgeschlossenheit von $\operatorname{Im} A$:

$$u_1, u_2 \in \operatorname{Im} A \; : \; u_1 = A(v_1), \; u_2 = A(v_2)$$

$$u_1 + u_2 = A(v_1) + A(v_2) \underset{A \text{ linear!}}{=} A(\underbrace{v_1 + v_2}_{\in V}) \in \operatorname{Im} A$$

$$\lambda u_1 = \lambda A(v_1) = A(\underset{V}{\lambda v_1}) \in \operatorname{Im} A \quad \checkmark$$

Abgeschlossenheit von $\operatorname{Ker} A$:

$$v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} A \to A(v_1) = 0_W, \; A(v_2) = 0_W$$

$$\to 0_W = A(v_1) + A(v_2) \underset{A \text{ linear}}{=} A(v_1 + v_2) \to v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker} A$$

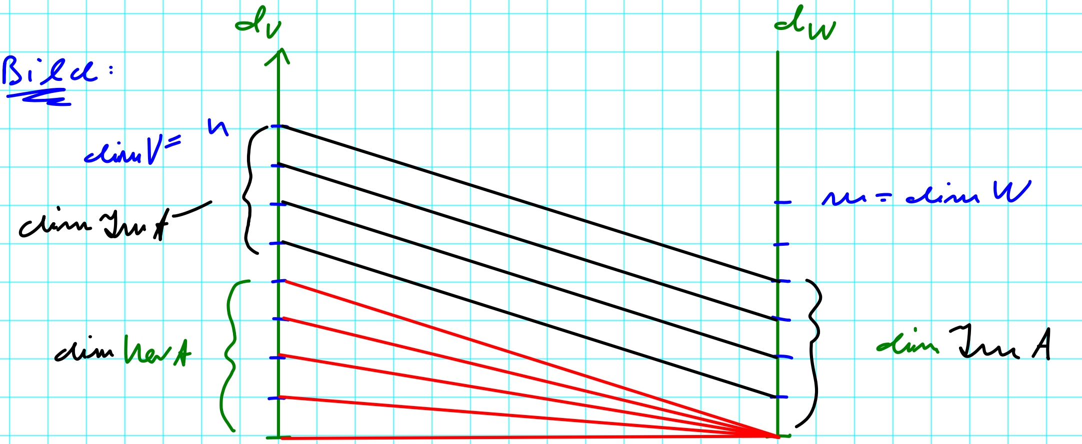
$$0_W = \lambda A(v_1) = A(\lambda v_1) \to \lambda v_1 \in \operatorname{Ker} A \quad \checkmark$$

$\lrcorner$

b) <u>Dimensionsformel</u> $\quad A: V \to W$ linear

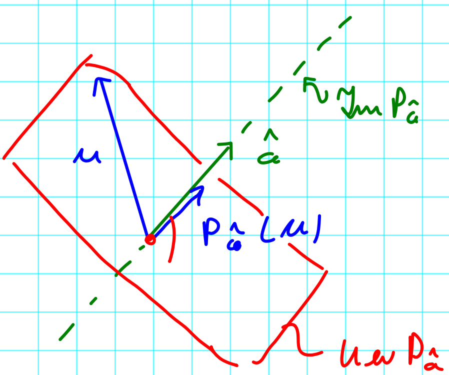
$$\boxed{\dim V \overset{!}{=} \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A}$$

$\rightarrow$ <u>Bild</u>:



<u>Beispiele</u>:

1) Projektion $\quad P_{\hat{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



$\operatorname{Im} P_{\hat{a}} = \operatorname{Span}\{\hat{a}\}$; $\dim \operatorname{Im} P_{\hat{a}} = 1$

$\operatorname{Ker} P_{\hat{a}} = \hat{a}^{\perp}$, $\dim \operatorname{Ker} P_{\hat{a}} = 2$

✓

2) $\frac{d}{dx} : P_4 \to P_4$: $\quad \operatorname{Im} \frac{d}{dx} = P_3$

$\operatorname{Ker} \frac{d}{dx} = P_0$

$= \{ f(x) = c \mid c \in \mathbb{R} \}$

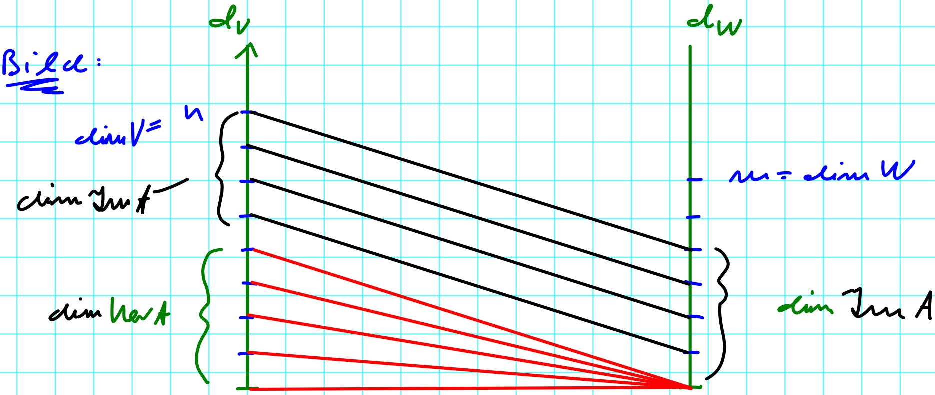
$\hookrightarrow \dim \operatorname{Ker} \frac{d}{dx} = 1$

$\dim \operatorname{Im} \frac{d}{dx} = 4$

$$5 = \dim P_4 \overset{!}{=} \underbrace{\dim \operatorname{Im} \tfrac{d}{dx}}_{4} + \underbrace{\dim \operatorname{Ker} \tfrac{d}{dx}}_{1} \quad ✓ .$$

$$\boxed{\dim V \overset{!}{=} \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A}$$

→ Bild:



Beweis: $U := \operatorname{Ker} A$ UVR von V

Basis von $\operatorname{Im} A$: $A(v_1), A(v_2), \ldots, A(v_k)$

$k = \dim \operatorname{Im} A$

$\Rightarrow$ $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängige Vekt. in V

$U' := \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$, $\dim U' = k$

$U + U' \overset{!}{=} V$

$U \cap U' \overset{!}{=} \{0_V\}$

$$\underbrace{\dim(U+U')}_{\dim V} = \underbrace{\dim U}_{\dim \operatorname{Ker} A} + \underbrace{\dim U'}_{\dim \operatorname{Im} A} - \overbrace{\dim U \cap U'}^{0}$$

$\dim V = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A$ ✓

"Diagnose anhand von Dimensionen":

$A: V \to W$ linear

1) $\dim \operatorname{Ker} A = 0 \iff A$ injektiv

2) $\dim \operatorname{Im} A = \dim W \iff A$ surjektiv

3) Falls $\dim V = \dim W$:

A injektiv $\iff$ A surjektiv $\iff$ bijektiv

Γ zu 1): A injektiv $\rightarrow$ $\ker A = \{0_V\}$ $\rightarrow$ $\dim \ker A = 0$

$A(0_V) = 0_W$

A nicht injektiv $\rightarrow$ $\exists\, v_1 \neq v_2 \in V:\ A(v_1) = A(v_2)$

$$0_W = A(v_1) - A(v_2)$$
$$= A(\underbrace{v_1 - v_2}_{=:\, v_3}) = A(v_3)$$

A lin. $\quad v_3 \neq 0_V$

$\rightarrow 0_V \neq v_3 \in \ker A \rightarrow \dim \ker A > 0 \,\lrcorner$

zu 2) A surjektiv $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} A = W$ $\rightarrow$ $\dim \operatorname{Im} A = \dim W$

$\dim \operatorname{Im} A = \dim W$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} A = W$ $\rightarrow$ A surjektiv!

zu 3) $\dim V = \dim W = n$

A injektiv $\overset{1)}{\Rightarrow}$ $\dim \ker A = 0$ $\Rightarrow$

Dim. formel: $n = \dim V = \underbrace{\dim \ker A}_{=0} + \dim \operatorname{Im} A$

$\overset{2)}{\Rightarrow}$ A surjektiv ✓

A surjektiv $\overset{2)}{\Rightarrow}$ $\dim \operatorname{Im} A = \dim W = n$

$\Rightarrow$ Dim. formel: $\underbrace{\dim V}_{n} = \underbrace{\dim \ker A}_{\overset{!}{=} 0} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} A}_{n}$

$\Rightarrow \dim \ker A = 0$

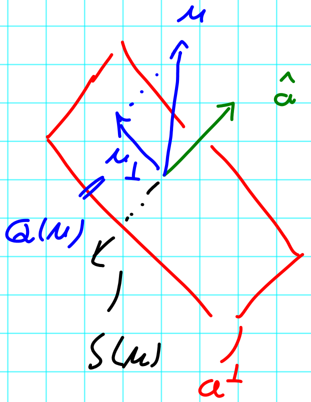
$\overset{1)}{\Rightarrow}$ A injektiv ✓

Verknüpfung ein. Abb.en

1) $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W) : \rightarrow \quad A+B, \quad \lambda A$ ✓

Bsp: 1) $P \equiv P_{\hat{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbb{1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$u \longmapsto u$



$Q := \mathbb{1} - P \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$,

geometrische Bedeutung?

$$Q(u) = (\mathbb{1} - P)(u) = \mathbb{1}(u) - P(u)$$

$$= u - \langle \hat{a}, u \rangle \hat{a} \stackrel{!}{=} u_\perp \quad !$$

2)

$$Q + P = \mathbb{1} \quad ✓$$

$$S := Q - P \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

geometr. Bedeutung ?