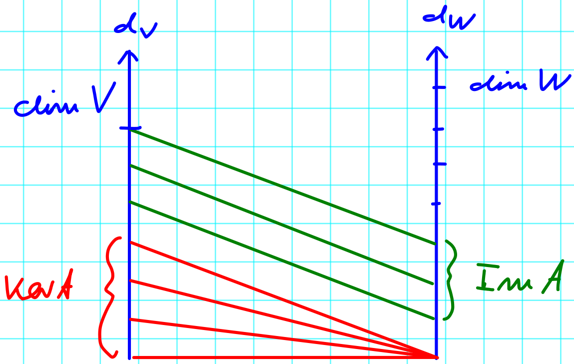
Wdhlg.: lin. Abb. $A : V \to W$

- $\operatorname{Im} A := \{ A(v) \mid v \in V \}$: Bild von A, UVR von W

- $\operatorname{Ker} A := \{ v \in V \mid A(v) = 0_W \}$: Kern von A, UVR von V

- $\operatorname{Rg} A := \dim \operatorname{Im} A$: Rang von A

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\dim V = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} V}$



$\rightsquigarrow$
- $\dim \operatorname{Ker} A = 0 \iff A$ injektiv
- $\dim \operatorname{Im} A = \dim W \iff A$ surjektiv
- falls $\dim V = \dim W$:

  A injektiv $\iff$ A surjektiv $\iff$ A bijektiv

Verknüpfungen von Abbildungen

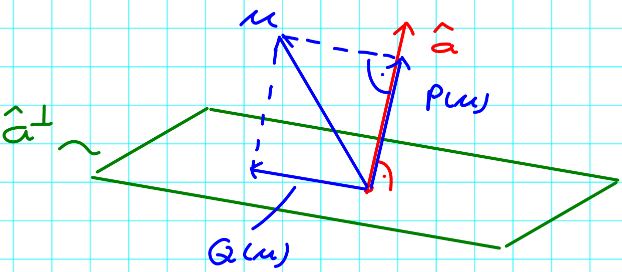
- Addition und Skalarmultiplikation

$$A, B \in \mathrm{Hom}(V, W) \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} A + B : V &\rightarrow W \\ u &\mapsto A(u) + B(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda A : V &\rightarrow W \\ u &\mapsto \lambda A(v) \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\mapsto \langle \hat{a}, u \rangle \hat{a} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{1} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\mapsto u \end{aligned}$$

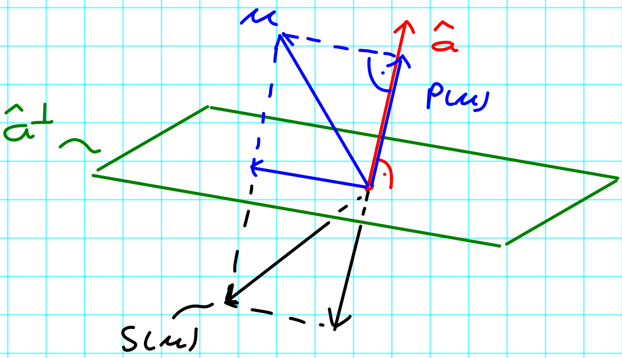


$$\boxed{Q = \mathbb{1} - P}$$

$$\begin{aligned} Q(u) &= u - \langle \hat{a}, u \rangle \hat{a} \\ &= u - u_\parallel = u_\perp \end{aligned}$$

Projektion auf $\hat{a}^\perp$

$$\rightarrow \boxed{S = Q - P} = \mathbb{1} - 2P$$



$$S(u) = u_\perp - u_\parallel$$

Spiegelung an $\hat{a}^\perp$-Ebene

Verkettung (Komposition) zweier lin. Abbn:

$$A : U \to V \quad , \quad B : V \to W$$

→ Verkettung von B nach A

$$B \circ A : U \to W$$
$$u \mapsto B(A(u))$$

lineare Abbildung!

etwa für Endomorphismen $A, B, C, \ldots \in \mathrm{End}(V)$
→ Verkettungen bel. oft und in bel. Reihenfolge möglich:

$$A \circ B, \quad B \circ A, \quad A \circ A \circ A, \quad A \circ B \circ C, \quad \ldots \in \mathrm{End}(V)$$

↳ Operatoralgebra (hilfreich in der QM)

Operator (auf V) = Endomorphismus $V \to V$

↳ Operatoraddition, -skalarmultiplikation

$$A, B \to A + B, \quad \lambda A$$

Operatorprodukt

$$A, B \longrightarrow \boxed{AB := A \circ B}$$

↳ $AB \neq BA$

↳ ganzzahlige Potenzen von Operatoren

$$A^0 := \mathbb{1} \equiv 1$$
$$A^n := A A^{n-1} = \underbrace{A A \cdots A}_{n \text{ mal}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

falls A bijektiv:

$$A^{-n} := (A^{-1})^n$$

Operatoren in der QM:

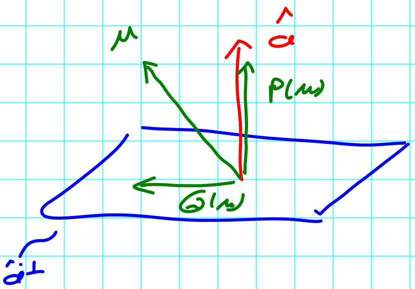
physikalische Größe A $\hat{=}$ Operator A auf Zustandsraum V
(Observable) (kompl. VR)

etwa für Teilchen:

Impuls	p	$\hat{=}$	Impulsoperator	P
Ort	x	$\hat{=}$	Ortsoperator	X
Energie	E	$\hat{=}$	Hamiltonoperator	H

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{k}{2} x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad H = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{k}{2} X^2$$

Bsp: wie zuvor: $P, Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



$$P(u) = \langle \hat{a}, u \rangle \hat{a}$$

$$Q = 1 - P$$

$$P^2 = P \quad ✓$$

$$Q^2 \overset{?}{=} Q \quad ✓$$

$$Q^2 = (1-P)^2 = (1-P)(1-P) = 1 - P - P + \underbrace{P^2}_{= P}$$

$$= 1 - 2P + P = 1 - P = Q \quad ✓$$

$$PQ \overset{?}{=} 0$$

$$PQ = P(1-P) = P - \underbrace{P^2}_{= P} = P - P = 0 \quad ✓$$

→ Operatorwertige Funktionen

analytische Fkt. (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$):

$$h(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_n \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$$

⇝ operatorwertige Fkt.

$$\boxed{h(A) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n}$$

etwa Operator-Exponentialfkt.:

$$\boxed{e^A \equiv \exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n}$$

Bsp1) Projektion P (wie oben), $\lambda \in \mathbb{R}$

$$e^{\lambda P} = \exp(\lambda P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda P)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^n P^n \underset{P = P^2 = P^3 = \dots = P^n}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \right) P + 1$$
$$= (e^{\lambda} - 1) P + 1$$

Bsp: Ableitungs-Operator $p = \frac{d}{dx}$ auf dem V.-Raum der analytischen Fkt.en.

- $p^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n = \frac{d^n}{dx^n}$

$$(p^n f = f^{(n)})$$

$\rightarrow$ Operator $\quad T_a := e^{ap} = \exp(ap), \quad a \in \mathbb{R}$

$$T_a f(x) = \exp(ap)\, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ap)^n f(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n f^{(n)}(x)$$

$$= f(x) + a f'(x) + \frac{a^2}{2} f''(x) + \frac{a^3}{3!} f'''(x) + \ldots$$

$$= f(x+a) \quad !$$

Taylor-Reihe von $f(x)$: $f(x+a)$

$$\rightarrow \quad T_a f(x) \equiv e^{ap} f(x) = f(x+a)$$

$\rightarrow \quad T_a = e^{ap}$ ist Translationsoperator !

infinitesimale Translation $\equiv$ Impuls !!

neues Thema: Lineare Abbildungen und Matrizen

$n \times m$ Matrix über $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots)$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}}$$

(I) $n \times m$ Matrix $\longrightarrow$ lin. Abb. $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$

(II) $\left.\begin{array}{l} \text{lin. Abb. } V \to W \\ \text{Basen } B, B' \end{array}\right\} \longrightarrow$ Abbildungsmatrix, $\underset{\dim W}{n} \times \underset{\dim V}{m}$

$\longrightarrow$ lin. Abb. $\simeq$ Matrix

(I): $M(n \times m, \mathbb{K})$ = Menge aller $n \times m$ Matrizen über $\mathbb{K}$

$$\ni A \longrightarrow \text{lin. Abb. } \tilde{A} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$$
$$x \mapsto Ax$$

mit Matrix-Tupel-Multiplikation

$$\boxed{(Ax)_i := \sum_{j=1}^{m} A_{ij}\, x_j}$$

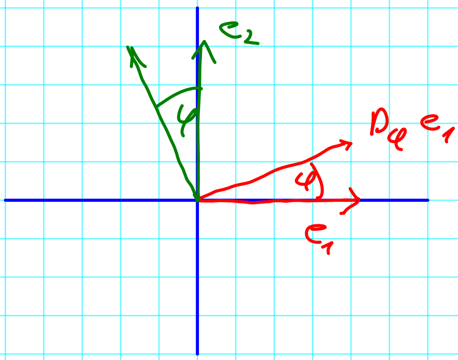
$$A x = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + \cdots \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + \cdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{m}$

Bsp.: $M(2\times 2, \mathbb{R}) \ni D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \to \tilde{D}_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$D_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\, x_1 - \sin\varphi\, x_2 \\ \sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2 \end{pmatrix}$$

Rotation um Winkel φ



Matrixaddition und -skalarmultiplikation:

$A, B \in M(n\times m, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\leadsto \quad (A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$$

$$(\lambda A)_{ij} := \lambda A_{ij}$$

d.h. $M(n\times m, \mathbb{K})$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum!

$$\left[\quad \widetilde{A+B} = \tilde{A} + \tilde{B} \qquad \widetilde{\lambda B} = \lambda \tilde{B} \quad \right]$$

$\leadsto$ Matrixmultiplikation

$\left.\begin{array}{l} A \in M(n\times m, \mathbb{K}) \\ B \in M(k\times n, \mathbb{K}) \end{array}\right\}$ $\quad \left(\begin{array}{l} \tilde{A} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n \\ \tilde{B} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k \end{array} \right)$

$\leadsto \quad BA \in M(k\times m, \mathbb{K})$ definiert durch:

$$\boxed{(BA)_{ij} := \sum_{l=1}^{m} B_{il} A_{lj}}$$

Bsp:

$$D_\varphi,\ D_\vartheta \longrightarrow D_\varphi D_\vartheta \stackrel{!}{=} D_{\varphi+\vartheta}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta & -\cos\varphi\sin\vartheta - \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta & -\sin\varphi\sin\vartheta + \cos\varphi\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\vartheta) & -\sin(\varphi+\vartheta) \\ \sin(\varphi+\vartheta) & \cos(\varphi+\vartheta) \end{pmatrix} = D_{\varphi+\vartheta} \quad \checkmark$$