Wdhlg.:

Operator auf V – Endomorphismus $V \to V$

⇝ Operatoraddition, -skalarmultiplikation ✓

Operatormultiplikation

$$AB = A \circ B$$

⇝ ganzzahlige Potenzen eines Op.s :

$$A^0 = 1_V \,, \quad A^n = A A^{n-1} = \underbrace{A \cdot \ldots A}_{n}$$

falls A bijektiv : $\quad A^{-n} = (A^{-1})^n$

→ Operator-Fkten: $\quad h(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$

etwa Operator-Exponentialfkt. :

$$e^A \equiv \exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

$n \times m$ Matrix :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix}$$

⇝ lineare Abb. $\tilde{A} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$

$$x \mapsto A x$$

Matrix-Tupel-Multiplikation

$$Ax = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1m}x_m \\ \vdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nm}x_m \end{pmatrix}$$

d.h.: $$(Ax)_i = \sum_{l=1}^{m} A_{il} x_l$$

Matrixverknüpfungen:

Addition, Skalarmultiplikation:

$$(A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij} \qquad \ulcorner \quad \widetilde{A+B} = \tilde{A} + \tilde{B}$$

$$(\lambda A)_{ij} := \lambda A_{ij} \qquad \widetilde{\lambda A} = \lambda \tilde{A} \quad \lrcorner$$

$\longrightarrow$ $M(n \times m, \mathbb{K})$ ist Vektorraum, Dimension $n \cdot m$

Matrixmultiplikation:

$$\boxed{(BA)_{ij} := \sum_{l=1}^{n} B_{il} A_{lj}} \qquad \ulcorner \quad \widetilde{BA} = \tilde{B} \circ \tilde{A} \quad \lrcorner$$

Für "quadratische" $(n=m)$ Matrizen $A, B, C, \ldots \in M(n \times n, \mathbb{K})$:

$$AB,\ BA,\ ABAA,\ ABC, \ldots \in M(n \times n, \mathbb{K})$$

$\rightsquigarrow$ Matrixalgebra ($\hat{=}$ Operatoralgebra auf $\mathbb{K}^n$)

$$A^0 = 1_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad : \text{ n-dim Einheitsmatrix}$$

$$A^n = AA^{n-1} = \underbrace{A \cdots A}_{n}$$

Matrix A <u>invertierbar</u> $:\Longleftrightarrow$ $\tilde{A}$ <u>bijektiv</u>

$\rightarrow$ es ex. $n \times n$ Matrix A^{-1} derart, dass

$$A^{-1} A = A A^{-1} = 1_n$$

$\rightarrow$ $A^{-n} := (A^{-1})^n$

<u>Matrix - Fkt.</u>:

$$h(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

z.B. <u>Matrix-Exponentialfkt.</u>:

$$e^A \equiv \exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

$\left[\ \widetilde{\exp(A)} = \exp(\tilde{A}) \ \right]$

ab sofort:

$$\boxed{M(n \times m, \mathbb{K}) \ni A \equiv \tilde{A} \in \mathrm{Hom}(m, n, \mathbb{K})}$$

<u>Matrix-Transposition</u> = Zeilen - Spalten - Vertauschung

$$M(n \times m) \ni A \xrightarrow{T} A^T \in M(m \times n)$$

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Bsp:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- $(1\ 2 \cdots m)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}$

Eigenschaften:
- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

⌜
- $(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_l \underbrace{A_{jl}}_{=(A^T)_{lj}} \underbrace{B_{li}}_{=(B^T)_{il}} = \sum_l (B^T)_{il} (A^T)_{lj}$ ✓

- $\mathbb{1} = (\mathbb{1})^T = (A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T \quad | (A^T)^{-1} \cdot$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ✓
⌟

A symmetrisch $\Leftrightarrow A^T = A$

A antisymmetrisch $\Leftrightarrow A^T = -A$

<u>Matrixrang</u>:

$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \tilde{A} = \dim \operatorname{Im} \tilde{A}$

$=$ Anzahl linear unabh. Spaltenvektoren

$\ulcorner$ $\operatorname{Im} \tilde{A} = \operatorname{Span}(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_m)$

Spaltenvekt. $\rightarrow$ $\quad \| \quad A_1 \quad A_2 \quad A_m$

$= \operatorname{Span}(A_1, \dots, A_m)$ ✓ $\lrcorner$

$A \in M(n \times n)$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Rg} A = n$

$\ulcorner$ A invertierbar $\Leftrightarrow$ $\tilde{A}$ bijektiv $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Rg} \tilde{A} = n$

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{Rg} A = n$ $\lrcorner$

Wie wird eine Matrix invertiert?

Verfahren nach Gauß:

benötigt elementare Zeilenumformungen

(Z1) Multiplikation der i-ten Zeile mit λ

(Z2) Addition des λ-Fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile

(Z3) Vertauschung von i-ter Zeile mit der j-ten

Matrixinversion nach Gauß:

forme Matrix A mittels (Z1 – Z3) in Einheitsmatrix um, dieselben Umformungen im gleichen Reihenfolge an Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ ausgeführt ergibt A^{-1}.

Bsp.

$$
\begin{array}{ccc}
 & A & \mathbb{1} \\[4pt]
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\[4pt]
(Z2) & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\[4pt]
(Z2) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\[4pt]
(Z1) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\[4pt]
 & \mathbb{1} & A^{-1}
\end{array}
$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Warum funktioniert's?

element. Zeilenumformungen $\hat{=}$ links-Multiplikation mit invertierbaren Matrizen!

$\lambda \neq 0$

$$A \xrightarrow{(Z1),\, i,\, \lambda} A' = S_i(\lambda)\, A \; :$$

$$\text{mit } S_i(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 \; \lambda \; 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$A \xrightarrow{(Z2),\, i,\, \lambda,\, j} A' = Q_{ij}(\lambda)\, A \; : \text{ mit}$$

$$Q_{ij}(\lambda) = \mathbb{1} + \lambda E_{ij}$$

$$A \xrightarrow{(Z3)\; i,\, j} A' = P_{ij}\, A \; : \text{ mit}$$

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \mathbb{1} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

$$\mathbb{1} \overset{!}{=} \overbrace{U_k \cdots U_3 U_2 U_1 A}^{\text{linke Seite}} \quad \Big| \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = \underbrace{U_k \cdots U_3 U_2 U_1 \mathbb{1}}_{\text{rechten Seite}}$$

$U_\ell \in \{ S_i(\lambda), Q_{ij}(\lambda), P_{ij} \}_{i,j=1,\dots,n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$

II Abbildungsmatrizen

- lin. Abb. $A : V \to W$
- Basis $B = (b_1, \dots, b_m)$ von V
- Basis $E = (e_1, \dots, e_n)$ von W

$$\begin{tikzcd}
V \ni v \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, leftrightarrow, "B"'] & w = A(v) \in W \arrow[d, "E"] \\
\mathbb{K}^m \ni {}_B v \arrow[r, "2", "{}_E A_B"'] & {}_E w \in \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Abbildungsmatrix von A bzgl. Basen B und E

$$\boxed{{}_E(Av) \overset{!}{=} {}_E A_B \, {}_B v}$$

benötigen:

(i) Bilder der Basisvektoren $b_1, \dots, b_m$ unter A,

$$A_1 = A(b_1), \quad A_2 = A(b_2), \quad \dots, \quad A_m = A(b_m),$$

bestimmen eindeutig die lin. Abb. A!

$$\Big[\; V \ni v = \sum_i v_i b_i \overset{A}{\longmapsto} A(v) = A\Big(\sum_i v_i b_i\Big) = \sum_i v_i \underbrace{A(b_i)}_{= A_i} \;\Big]$$

(ii) Komponenten der Bilder der Basisvektoren bzgl. Basis $\mathcal{E}$ von W:

$$\mathbb{K}^n \ni {}_{\mathcal{E}}A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathcal{E}}A_2 = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad {}_{\mathcal{E}}A_m = \begin{pmatrix} A_{1m} \\ A_{2m} \\ \vdots \\ A_{nm} \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ **Abbildungsmatrix**

$$\boxed{{}_{\mathcal{E}}A_B = \left({}_{\mathcal{E}}A_1, {}_{\mathcal{E}}A_2, {}_{\mathcal{E}}A_3, \dots, {}_{\mathcal{E}}A_m \right)}$$

Merke: "Bilder der Basisvektoren = Spalten der Abbildungsmatrix"

Bsp:

$$A = \frac{d}{dx} : P_3 \longrightarrow P_2$$

$$f \longmapsto A(f) = \frac{d}{dx} f = f'$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Basis von } P_3 : \; B = \left(\overset{b_1}{\overset{\shortparallel}{1}}, \overset{b_2}{\overset{\shortparallel}{x}}, \overset{b_3}{\overset{\shortparallel}{x^2}}, \overset{b_4}{\overset{\shortparallel}{x^3}} \right) \\ &\text{Basis von } P_2 : \; \mathcal{E} = (1, x, x^2) \end{aligned}\right\} \rightarrow {}_{\mathcal{E}}A_B$$

$${}_{\mathcal{E}}(A\, b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathcal{E}}(A\, b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathcal{E}}(A\, b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_{\mathcal{E}}(A\, b_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

d.h. $${}_{\mathcal{E}}A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f = 2x - 3x^2 + x^3 \rightarrow {}_B f = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow {}_{\mathcal{E}}\left(\frac{df}{dx} \right) = {}_{\mathcal{E}}(A f) = {}_{\mathcal{E}}A_B \; {}_B f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad f' = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}_B = 2 - 6x + 3x^2 \quad !$$

$$\left(\quad f' = (2x - 3x^2 + x^3)' = 2 - 6x + 3x^2 \quad \checkmark \quad \right)$$